

## Egzamin poprawkowy z RP 1, 29 IX 2009.

1. (15 p.) Wiadomo, że liczba wypadków danego dnia na ulicach pewnego miasta ma rozkład Poissona z parametrem 1, jeśli tym dniem jest sobota lub niedziela, oraz Poissona z parametrem 5, jeśli jest to poniedziałek, wtorek, środa, czwartek lub piątek. Wiadomo, że pewnego ustalonego dnia nie było żadnego wypadku. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że za tydzień również nie będzie wypadku?

2. Zmienna losowa  $(X, Y)$  ma rozkład z gęstością

$$g(x, y) = Cx(x + y)1_{\{|y| \leq x \leq 1\}}.$$

(5 p.) Wyznaczyć  $C$ .

(5 p.) Wyznaczyć  $\mathbb{P}(X \geq 2|Y|)$ .

(5 p.) Wyznaczyć  $\mathbb{E}(X|Y)$ .

3. Z urny zawierającej 6 kul ponumerowanych liczbami od 1 do 6 losujemy kule aż do momentu gdy wyciągniemy kulę z numerem 1. Niech  $X$  będzie największym numerem, jaki pojawił się na wyciągniętych kulach.

(10 p.) Wyznaczyć rozkład  $X$ .

(5 p.) Wyznaczyć  $\mathbb{E}X$ .

4. (20 p.) Zmienne losowe  $X_1, X_2, \dots$  są niezależne, przy czym dla  $n \geq 1$  zmienna  $X_n$  ma rozkład jednostajny na odcinku  $[0, 1 - (2n)^{-1}]$ . Czy ciąg

$$\sqrt[2n]{X_1 X_2 \dots X_n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

jest zbieżny p.n.? A jeśli tak, to do jakiej granicy?

5. Zmienne losowe  $X, Y$  są niezależne i mają rozkład normalny  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

(5 p.) Wyznaczyć gęstość rozkładu zmiennej  $X + 2Y + 1$ .

(10 p.) Wyznaczyć gęstość rozkładu zmiennej  $(X + Y, X + 2Y)$ .

6. (20 p.) Dany jest ciąg  $(X_n)$  niezależnych zmiennych losowych, przy czym dla  $n \geq 1$ , zmienna  $X_n$  ma rozkład Bernoulliego z parametrami  $n, 1/n^2$ . Rozstrzygnąć, czy szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin X_n$  jest zbieżny p.n.