Zadania na czwartą kartkówkę

1. Zmienna losowa X spełnia warunek $\mathbb{E}|X|^r < \infty$ dla pewnej liczby $r > 0$.
a) Udowodnić, że dla dowolnej liczby $p < r$ mamy $\lim_{t\to\infty} t^p\mathbb{P}(|X| \geq t) = 0$.
b) Udowodnić, że $\lim_{t\to\infty} t^r\mathbb{P}(|X| \geq t) = 0$.

2. Zmienna losowa X jest dodatnia p.n. i spełnia warunek $\mathbb{E}X^r < \infty$.
a) Udowodnić, że $\lim_{p\uparrow r}(\mathbb{E}X^p)^{1/p} = (\mathbb{E}X^r)^{1/r}$.
b) Udowodnić, że $\lim_{p\downarrow 0}(\mathbb{E}X^p)^{1/p} = \exp(\mathbb{E}\ln X)$.
Wsk. do a): użyć twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej.
Wsk. do b): jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = g$, to $\lim_{n\to\infty}(1 + a_n/n)^n = e^g$. Ponadto, użyć twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej.

3. Zmienne X, Y są niezależne i mają rozkład $\mathcal{N}(0, 1)$.
a) Wyznaczyć gęstość rozkładu zmiennej $(X + Y + 1, X + 3Y - 2)$.
b) Wyznaczyć taką liczbę a, by zmienne $(X+Y)^2$ oraz $X-aY+1$ były niezależne.

4. W 10000 torebek z cukrem umieszczono w sposób losowy 1000 oznakowanych kryształków cukru. Wyznaczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że w ustalonej torebce będą co najmniej 3 oznakowane kryształki cukru. Oszacować błąd związany z przybliżeniem.

5. Liczby wypadków w ciągu miesiąca na dwóch skrzyżowaniach A i B są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie. Wiadomo, że w marcu na tych skrzyżowaniach doszło łącznie do 10 wypadków. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że na skrzyżowaniu A było dokładnie 7 wypadków?

6. Dane są zmienne X_1, X_2, ..., przy czym dla dowolnego $n \geq 1$ zmienna X_n ma rozkład wykładniczy z parametrem n^α (α jest ustaloną liczbą dodatnią). Udowodnić, że $X_n \to 0$ p.n.

7. Zmienna X ma rozkład geometryczny z parametrem p, jeśli $\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Dany jest ciąg $(X_n)_{n\geq 1}$ zmiennych losowych taki, że dla dowolnego n zmienna X_n ma rozkład geometryczny z parametrem $n/(n+1)$.
a) Udowodnić, że $(X_n)_{n\geq 1}$ zbiega do 0 według prawdopodobieństwa.
b) Udowodnić, że jeśli $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne, to $(X_n)_{n\geq 1}$ nie jest zbieżny p.n. Co jeśli pominiemy założenie o niezależności - czy może się wówczas zdarzyć, że $(X_n)_{n\geq 1}$ jest zbieżny p.n.?

8. Dany jest ciąg $(X_n)_{n\geq 1}$ niezależnych zmiennych losowych taki, że dla każdego n, zmienna X_n ma rozkład normalny o średniej 0 i wariancji 2^{-n}.
a) Udowodnić, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ jest zbieżny według prawdopodobieństwa.
b) Udowodnić, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ jest zbieżny p.n.