

Zadania na trzecią kartkówkę

1. Zmienne losowe X, Y są niezależne i mają rozkład jednostajny na odcinku $[-1, 1]$. Wyznaczyć gęstość rozkładu zmiennej $X + Y$.

2. Zmienna losowa X ma rozkład $N(0, 1)$. Wykazać, że $\mathbb{E}X^n = 0$ gdy n jest liczbą nieparzystą oraz $\mathbb{E}X^n = (n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (n-1)$ jeśli n jest liczbą parzystą.

3. Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład z gęstością

$$g(x, y) = ye^{-x}1_{\{0 \leq y \leq x\}}.$$

a) Obliczyć $\mathbb{P}(X \geq 2)$.

b) Wyznaczyć $\mathbb{E}\sqrt{e^X}$.

c) Wyznaczyć gęstość rozkładu zmiennej Y .

d) Czy X, Y są niezależne?

4. Zmienne X, Y są niezależne i mają rozkład wykładniczy z parametrem 1.

a) Wyznaczyć rozkład zmiennej $X/(X + Y)$.

b) Wyznaczyć gęstość rozkładu zmiennej $X - Y$.

5. Zmienne X, Y są niezależne i mają rozkład $N(0, 1)$.

a) Wyznaczyć rozkład $X + Y$.

b) Udowodnić, że $\sqrt{X^2 + Y^2}$ oraz Y/X są niezależne.

6. Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład jednostajny na kole o środku $(0, 0)$ i promieniu 1.

a) Obliczyć $\mathbb{P}(X \geq 0, Y \leq 0)$.

b) Obliczyć $\text{Var}X$.

c) Udowodnić, że $((X + Y)/\sqrt{2}, (X - Y)/\sqrt{2})$ ma ten sam rozkład co (X, Y) .

d) Obliczyć $\text{Cov}(X, Y)$. Czy X, Y są niezależne?

e) Udowodnić, że X/Y oraz $\sqrt{X^2 + Y^2}$ są niezależne.