RP 1, zadania na drugą kartkówkę

1. Zmienna losowa X ma rozkład z gęstością

$$g(x) = \frac{1}{4}x^3 1_{[0,2]}(x).$$

a) Wyznaczyć rozkład zmiennej $Y = \max(X, 1)$.
b) Wyznaczyć gęstość rozkładu zmiennej $Z = (X-1)^3$.
c) Obliczyć $\mathbb{E}(X^2+5)$.

2. Zmienne X, Y są niezależne, X ma rozkład jednostajny na odcinku $[0,2]$, a rozkład Y jest zadany przez równości $\mathbb{P}(Y=-1) = \mathbb{P}(Y=1) = \frac{1}{2}$. Wyznaczyć rozkład zmiennej $X+Y$.

3. Zmienne losowe X, Y mają rozkłady zadane przez dystrybuanty F, G, odpowiednio. Udowodnić, że jeśli dla dowolnej liczby rzeczywistej t zachodzi równość $F(t) = 1 - G(-2t)$, to wówczas X nie ma atomów oraz $\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(Y \in -2A)$ dla dowolnego podzbioru borelowskiego A prostej rzeczywistej.
Uwaga: $-2A = \{-2x : x \in A\}$.

4. Zmienne losowe X, Y są niezależne, przy czym X ma rozkład Poissona z parametrem 2, a Y ma rozkład geometryczny z parametrem $\frac{1}{3}$.
a) Wyznaczyć rozkład zmiennej $\min\{X, 2\}$.
b) Obliczyć $\mathbb{P}(X = Y)$.
c) Dla jakich $a > 0$ wartość oczekiwana zmiennej a^Y jest skończona?

5. Dziesięciu chłopców i dziesięć dziewczynek ustawia się losowo w pary. Wyznaczyć wartość oczekiwaną liczby par złożonych z samych dziewczynek.

6. Zmienne X, Y są niezależne, przy czym X oraz XY mają rozkład jednostajny na odcinku $[0,1]$. Udowodnić, że Y ma rozkład jednopunktowy, skoncentrowany w 1.

7. Z kwadratu $[0,1]^2$ losujemy kolejno niezależnie punkty P_1,P_2, ..., zgodnie z prawdopodobieństwem geometrycznym. Udowodnić, że z prawdopodobieństwem 1 istnieje nieskończenie wiele odcinków o końcach w wylosowanych punktach, których długość jest większa niż 1.

8. Dane są zmienne losowe X_1, X_2, ... (być może zależne) o rozkładzie wykładniczym z parametrem 1. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że $X_n \geq 2\ln n$ dla niekończenie wielu n.

9. Zmienne X_1, X_2, ... są niezależne, przy czym dla każdego $n \geq 1$ zmienna X_n ma rozkład Bernoulliego z parametrami n, $\frac{1}{n+1}$. Udowodnić, że z prawdopodobieństwem 1 nieskończenie wiele spośród zmiennych X_2, X_3, ... przyjmie tę samą wartość co X_1.

10. Zmienna losowa X ma standardowy rozkład normalny. Udowodnić, że $|X|$ oraz $\frac{X}{|X|}$ są niezależne.

11. Zmienne losowe X_1, X_2, ... są niezależne i mają rozkład jednostajny na odcinku $[0, 1]$. Definiujemy

$$\tau = \inf\{n : X_1 + X_2 + \ldots + X_n \geq 1\}.$$

Wyznaczyć rozkład zmiennej τ.