Zadania na pierwszą kartkówkę

1. Losujemy 100 liczb a_1, a_2, ..., a_{100} ze zbioru $\{0, 1, 2\}$. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że każda z liczb 0, 1, 2 pojawi się w ciągu $(a_1, a_2, \ldots, a_{100})$.

2. Losujemy punkty A, B, C z okręgu $\mathcal{O}$. Wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że trójkąt ABC jest rozwartokątny.

3. Dziesięć osób, wśród których są osoby A, B, C, siada losowo przy okrągłym stole. Wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że żadne dwie spośród A, B, C nie będą siedziały obok siebie.

4. W urnie znajduje się pięć prawidłowych sześciennych kostek oraz jedna fałszywa, z samymi szóstkami. Losujemy kostkę i wykonujemy nią rzut.

a) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wyrzucimy szóstkę?

b) Załóżmy, że wyrzuciliśmy szóstkę. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że rzucając tą kostką jeszcze raz znowu wyrzucimy szóstkę?

5. Z talii 52 kart losujemy bez zwracania 5 kart. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że mamy dokładnie jednego asa, dokładnie jednego króla i co najmniej jedną damę, jeśli wiadomo, że mamy dokładnie cztery piki.

6. Strzelec A trafia w cel z prawdopodobieństwem 3/5, a strzelec B - z prawdopodobieństwem 4/5. Osoby A i B oddają 10 strzałów do tarczy: przed każdym strzałem rzucają symetryczną monetą i jeśli wypadnie orzeł - strzela A, w przeciwnym razie - B.

a) Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że cel zostanie trafiony dokładnie 7 razy.

b) Załóżmy, że cel został trafiony dokładnie 7 razy. jakie jest prawdopodobieństwo tego, że A strzelał co najmniej 2 razy?

c) Jaka jest najbardziej prawdopodobna liczba trafień?

7. Z przedziału $[0, 1]$ losujemy dwie liczby, dzielące go na trzy podprzedziały (być może zdegenerowane). Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że najkrótszy z nich ma długość większą niż 1/4.

8. Liczby 1, 2, ..., $2n$ ($n \in \{1, 2, \ldots\}$ ustalone) ustawiono losowo w ciąg $(a_1, a_2, \ldots, a_{2n})$. Zbadać niezależność zdarzeń $\{a_1 < a_{2n}\}$, $\{a_2 < a_{2n-1}\}$, ..., $\{a_n < a_{n+1}\}$.

9. Liczby p_1, p_2, ..., p_n są parami różnymi liczbami pierwszymi ($n \in \{1, 2, \ldots\}$ ustalone). Ze zbioru $\{1, 2, \ldots, p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n\}$ losujemy liczbę k. Rozważmy zdarzenia $A_m = \{$ liczba k dzieli się przez $p_m\}$, $m = 1, 2, \ldots, n$. Zbadać niezależność zdarzeń A_1, A_2, ..., A_n.

10. Rozdano 20 pączków dzieciom D_1, D_2, ..., D_{10}. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że dziecko D_{10} otrzymało co najmniej jednego pączka, jeśli dzieci D_1 i D_2 otrzymały po dwa pączki?

11. Ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 10\}$ losujemy bez zwracania dwie liczby. Czy istnieje taka liczba $k \in \{3, 4, \ldots, 19\}$, dla której zdarzenia $A = \{$suma oczek wynosi $k\}$ oraz $B = \{$wśród wyciągniętych liczb jest 9$\}$, są niezależne?

12. W urnie znajduje się 20 kul ponumerowanych liczbami od 1 do 20. Z urny losujemy ze zwracaniem 10 kul. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że najmniejszą wylosowaną liczbą jest 11.

Wskazówka: być może warto rozważyć zdarzenia A_k - najmniejsza wylosowana liczba jest niemniejsza niż k, $k = 11, 12$.