Zadania przygotowawcze z RP1

Omówienie: w piątek 13 VI, 10.00.
Uwaga: *Ten plik może być modyfikowany. Mogą pojawić się nowe zadania.*

1. Zmienne losowe X, Y są niezależne, przy czym $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 1) = 1/4$, $\mathbb{P}(X = 2) = 1/2$, a Y ma rozkład jednostajny na odcinku $[-2, 1]$. Obliczyć $\mathbb{E}(X 1_{Y>0} | X + 1_{Y>0})$.

2. Zmienne X, Y są niezależne i mają rozkład geometryczny z parametrem 1/2. Wyznaczyć $\mathbb{E}(X | \max(X, Y))$.

3. Zmienna (X, Y) ma rozkład jednostajny na kwadracie o wierzchołkach $(1, 0)$, $(2, 1)$, $(1, 2)$, $(0, 1)$. Wyznaczyć $\mathbb{E}(XY | X + Y)$.

4. Niech X, Y będą zmiennymi losowymi, a $\mathcal{G}$ będzie σ-ciałem takim, że X jest niezależna względem $\mathcal{G}$, a Y jest mierzalna względem $\mathcal{G}$. Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie funkcją borelowską. Udowodnić, że jeśli $\mathbb{E}|f(X, Y)| < \infty$, to

$$\mathbb{E}(f(X, Y)|\mathcal{G}) = \phi(Y),$$

gdzie $\phi(y) = \mathbb{E}(f(X, y))$.

5. Zmienne X, Y są niezależne i mają rozkład jednostajny na odcinku $[1, 2]$. Obliczyć $\mathbb{E}(\frac{1}{X+Y} | X)$.
Wskazówka: Skorzystać z zadania 4.

6. Zmienne N, X_0, X_1, X_2, $\ldots$ są niezależne, przy czym N ma rozkład Poissona z parametrem 1, a dla $n = 0, 1, \ldots$, X_n ma rozkład normalny o średniej n i wariancji 1. Obliczyć $\mathbb{E}X_N$.
Wskazówka: Można skorzystać z zadania 4. Można też elementarnie.

7. Rzucamy raz prawidłową sześcienną kostką do gry, a następnie rzucamy nią tyle razy, ile wypadło oczek. Niech S oznacza sumę wyrzuconych oczek. Wyznaczyć $\mathbb{E}S$.
Wskazówka: Można skorzystać z zadania 4. Można też elementarnie.

8. Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład normalny o średniej $(0, 0)$, $\mathrm{Var}X = \sigma_X^2$, $\mathrm{Var}Y = \sigma_Y^2$, $\mathrm{Cov}(X, Y) = c$. Obliczyć $\mathbb{E}(X|Y)$ oraz $\mathbb{E}(X^2|Y)$. Napisać gęstość zmiennej $(X + 1, 2Y + 2)$ oraz zmiennej $4Y + 6$.

9. Ciąg (X_n) jest zbieżny według prawdopodobieństwa do X, a (Y_n) jest zbieżny p.n. do Y. Udowodnić, że (X_n^2) zbiega według prawdopodobieństwa do X^2. Udowodnić, że $(X_n X + Y_n)$ zbiega według prawdopodobieństwa. Czy ostatni ciąg zbiega p.n.?

10. W klasie jest 20 dziewczynek i 20 chłopców. Dzieci ustawiono w pary losowo. Obliczyć wartość oczekiwaną liczby par złożonych z samych dziewczynek.

11. Dana jest zmienna losowa X o rozkładzie z gęstością g taką, że $g > 0$ na $[-2, 5]$ i $g = 0$ poza $[-2, 5]$. Wyznaczyć

$$\lim_{p \to \infty} [\mathbb{E}|X|^p]^{1/p}.$$

12. Niech (X_n) będzie ciągiem zmiennych losowych, przy czym dla $n = 1, 2,$ zmienna (X_n) ma rozkład Poissona z parametrem n. Udowodnić, że $X_n/n \to 1$ według prawdopodobieństwa.

13. Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład normalny i $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$. Udowodnić, że X i Y są niezależne.

14. Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład jednostajny na trójkącie o wierzchołkach $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$. Udowodnić, że zmienne $X + Y$ oraz $X/(X + Y)$ są niezależne. Obliczyć ich wartości oczekiwane.

15. Zmienna (X, Y) ma rozkład z gęstością

$$g(x, y) = \frac{x^3}{2} e^{-x(y+1)} 1_{\{x \geq 0, y \geq 0\}}.$$

a) Czy zmienne X oraz XY są niezależne?
b) Obliczyć $\mathbb{E}(XY|X)$.

16. Zmienne X, Y, Z są niezależne i całkowalne.
a) Obliczyć $\mathbb{E}(X|Z)$, $\mathbb{E}(XY|Z)$, $\mathbb{E}(X^2Z|Z)$, $\mathbb{E}(X + Y + Z|Y + Z)$.
b) Przy dodatkowym założeniu $\mathbb{P}(X = -2) = \mathbb{P}(X = 2) = 1/2$, obliczyć $\mathbb{E}(XY|YZ)$.