**Zadania przygotowawcze do kolokwium**

**1.** Niech $(W_t)$ będzie procesem Wienera. Udowodnić, że

$$\mathbb{P}(\text{ciąg } (W_n) \text{ jest rosnący od pewnego miejsca}) = 0.$$

**2.** Niech $(N_t)$ będzie procesem Poissona z parametrem 3. Niech $\delta$ będzie ustaloną liczbą dodatnią. Udowodnić, że z prawdopodobieństwem 1, dla każdej liczby naturalnej $k$ istnieją liczby dodatnie $t$, $s$ takie, że $t - s = \delta$ oraz $N_t - N_s = k$.

**3.** Niech $(W_t)$ będzie procesem Wienera. Obliczyć $\mathbb{E}(W_2|W_1 + W_3)$.

**4.** Niech $(N_t)$ będzie procesem Poissona z parametrem 2. Wyznaczyć $\mathbb{E}(N_3|N_5)$.

**5.** Niech $(W_t)$ będzie procesem Wienera. Udowodnić, że ciąg $(\sin(W_n))$ jest rozbieżny p.n.

**6.** Niech $(N_t)$, $(M_t)$ będą niezależnymi procesami Poissona z parametrem 1. Udowodnić, że ciąg

$$\frac{N_n - M_n}{\sqrt{M_n + N_n}}$$

jest zbieżny według rozkładu. Wyznaczyć rozkład graniczny.

**7.** Niech $(N_t)$ będzie procesem Poissona z parametrem 2. Udowodnić, że

$$\mathbb{P}(\forall_{k\in\mathbb{N}}\exists_{t\geq 0} N_{t+1} - N_t = k) = 1.$$

**8.** Niech $(W_t)$ będzie procesem Wienera. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że dla pewnego $t \in \mathbb{Q}$ mamy $W_t \in \mathbb{Q}$.

**9.** Niech $(W_t)$ będzie procesem Wienera, a $I_1$, $I_2$, ... będą przedziałami, przy czym dla każdego $n$ przedział $I_n$ ma długość nie przekraczającą 10. Udowodnić, że

$$\mathbb{P}(\text{dla dostatecznie dużych } n,\ W_n \in I_n) = 0.$$

**10.** Niech $(N_t)$ będzie procesem Poissona z parametrem 1. Obliczyć

$$\mathbb{P}(0 = N_0 < N_1 < N_2 < \ldots < N_{10} = 11).$$

**11.** Niech $(N_t)$ będzie procesem Poissona z parametrem $\lambda$. Udowodnić, że z prawdopodobieństwem 1 w ciągu $(N_n)_n$ występują dowolnie długie ciągi kolejnych liczb naturalnych.

**12.** Udowodnić, że z prawdopodobieństwem 1 szereg

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{W_k + k}$$

jest rozbieżny.

**13.** Niech $\alpha$ będzie liczbą rzeczywistą większą niż $\frac{1}{2}$. Udowodnić, że

$$\lim_{t\to\infty} \frac{W_t}{t^\alpha} = 0. \text{ p.n.}$$

**Wskazówki:**

**1.** Rozważyć zdarzenia

$$A_n = \{\omega \in \Omega : W_n(\omega) > W_{n+1}(\omega)\}$$

i skorzystać z lematu Borela-Cantelli.

**2.** Wziąć bardzo szczególne $s$, $t$, np. kolejne liczby naturalne i z lematu Borela-Cantelli udowodnić, że zachodzi nieskończenie wiele zdarzeń

$$A_n = \{\omega \in \Omega : N_{n+1} - N_n = k\}.$$

**3.** Wyznaczyć taką liczbę $\alpha$, by zmienne $W_2 + \alpha(W_1 + W_3)$ i $W_1 + W_3$ były nieskorelowane (a więc niezależne, na mocy gaussowskości rozkładu). Następnie rozbić

$$W_2 = [W_2 + \alpha(W_1 + W_3)] - \alpha(W_1 + W_3).$$

**4.** Wyznaczyć rozkład warunkowy $N_3$ względem $N_5$, a potem obliczyć średnią tego rozkładu.

**5.** Wystarczy np. wykazać, że z prawdopodobieństwem 1:

a) dla nieskończenie wielu $n$ mamy $W_{n+1} - W_n \sim \frac{1}{1000}$,

b) dla nieskończenie wielu $n$ mamy $W_{n+1} - W_n \sim \frac{1}{2}$; wówczas po potraktowaniu $W_n$ sinusem nie ma szans na zbieżność.

Aby udowodnić a) i b), używamy lematu Borela-Cantelli.

**6.** Wykorzystać centralne twierdzenie graniczne oraz prawo wielkich liczb dla procesu Poissona.

**7.** Ustalmy $k$. Lemat Borela-Cantelli dla zdarzeń

$$A_n = \{N_{n+1} = N_n + k\}$$

daje, iż z prawdopodobieństwem 1 zachodzi nieskończenie wiele z nich - w szczególności jedno. Wystarczy już tylko wziąć (przeliczalną!) część wspólną po $k$.

**8.** Przerobić kwantyfikatory na sumy/iloczyny zdarzeń i brutalnie oszacować. Odpowiedź: 0.

**9.** Jeśli $W_n \in I_n$, $W_{n+1} \in I_{n+1}$, to $W_{n+1} - W_n$ musi należeć do pewnego przedziału (deterministycznego) o długości nie przekraczającej 20 (np. jeśli $I_n = [0, 10]$, $I_{n+1} = [50, 59]$, to tym przedziałem jest $[40, 59]$). Wykorzystać lemat Borela-Cantelli aby pokazać, że z prawdopodobieństwem 1 przyrosty muszą „wyskakiwać” z góry ustalonych przedziałów o długości 20.

**10.** „Na piechotę”: rozpatrzyć wszystkie możliwości.

**11.** Wystarczy, dla ustalonego $M$ udowodnić, że z prawdopodobieństwem 1 w ciągu $(N_n)$ występuje podciąg kolejnych liczb naturalnych długości $M$

(zdarzenie, którego prawdopodobieństwo nas interesuje w zadaniu, to przeliczalne przecięcie tego typu zdarzeń). Aby to udowodnić, skorzystać z lematu Borela-Cantelli.

**12.** Skorzystać z prawa wielkich liczb dla procesu Wienera.

**13.** Powtórzyć rozumowanie z ćwiczeń, dla $\alpha = 1$.