Czwarta seria zadań trudnych

Termin oddawania rozwiązań: 6 I 2010.

8. Rozstrzygnąć, czy funkcja

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

jest funkcją charakterystyczną pewnego rozkładu na prostej.

9. Załóżmy, że (X_n) jest nieujemnym martyngałem. Dowieść, że dla $p \in (0,1)$,

$$||\sup_n X_n||_p \leq \left(\frac{1}{1-p}\right)^{1/p} \sup_n ||X_n||_p.$$

10. (Nierówność maksymalna Dooba, przypadek $p = 1$) Podać przykład martyngału (X_n), dla którego $\sup_n ||X_n||_1 < \infty$ oraz $|| \sup_n |X_n| \, ||_1 = \infty$.

11. (Nierówność Hardy'ego-Littlewooda) Załóżmy, że a_1, a_2, ... jest ciągiem liczb dodatnich. **Korzystając z teorii martyngałów** udowodnić, że dla $p > 1$,

$$a_1^p + \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^p + \left(\frac{a_1+a_2+a_3}{3}\right)^p + \ldots \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p.$$

12. Martyngał (X_n) spełnia warunek $\sup_n \mathbb{E}|X_n| \log |X_n| < \infty$. Czy wynika stąd zbieżność martyngału (X_n) w L^p a) dla $p = 1$, b) dla $p > 1$?

13. Niech $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ będzie błądzeniem symetrycznym po liczbach całkowitych oraz $\tau = \inf\{n : S_n \in \{-a, a\}\}$, gdzie a jest ustaloną liczbą całkowitą dodatnią. Wykorzystując nadmartyngał wykładniczy, udowodnić oszacowanie

$$\mathbb{E} \exp\left(-\frac{\tau}{2}\right) \leq \frac{1}{\cosh a}.$$