Trzecia seria zadań trudnych

Termin oddawania rozwiązań: 12 XII 2009.

5. W urnie znajduje się jedna biała kula. Wykonujemy następujący nieskończony ciąg losowań: w każdym losowaniu wyciągamy kulę, oglądamy ją, a następnie wrzucamy ją z powrotem i dokładamy do urny jedną czarną kulę. Dla $n \geq 1$, niech X_n oznacza liczbę losowań o numerze niewiększym niż n, w których wyciągnęliśmy białą kulę. Wykazać, że ciąg $(X_n / \log n)$ jest zbieżny według prawdopodobieństwa.

6. Scharakteryzować wszystkie rozkłady prawdopodobieństwa P w $\mathbb{R}$ posiadające następującą własność. Jeśli X, Y, Z są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie P, to $X + Y$ ma ten sam rozkład, co $2X$, oraz $X + Y + Z$ ma ten sam rozkład, co $3X$.

7. Zmienne X_1, X_2, …, X_n są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0, a]$. Obliczyć $\mathbb{E}(X_1 | \max(X_1, X_2, \ldots, X_n))$.