Zadania przygotowawcze do kolokwium

Uwaga: Wśród poniższych zadań nie ma nic o warunkowej wartości oczekiwanej i jest tylko jedno zadanie na CTG. Zagadnienia te są poruszane w zadaniach na trzecią kartkówkę.

1. Dany jest ciąg (X_n) zmiennych losowych, taki, że $\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} X_n = -\infty) = p$, $\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} X_n = 0) = q$, $\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} X_n = \infty) = r$, przy czym $p + q + r = 1$. Zbadać asymptotyczne zachowanie się ciągu dystrybuant X_n. Czy (X_n) jest zbieżny według rozkładu?

2. Dane są ciągi (X_n), (Y_n) zmiennych losowych, przy czym (X_n) oraz $(X_n + Y_n)$ są zbieżne według rozkładu.

a) Czy (Y_n) jest zbieżny według rozkładu?

b) Jaka jest odpowiedź w a), jeśli założymy, że dla każdego $n \geq 1$ zmienne X_n oraz Y_n są niezależne?

3. Dane są ciągi (X_n), (Y_n) zmiennych losowych, przy czym (X_n) jest zbieżny według rozkładu do X i $\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} Y_n = \infty) > 0$.

a) Udowodnić, że ciąg $(X_n + Y_n)$ nie jest zbieżny według rozkładu.

b) Udowodnić, że jeśli $\mathbb{P}(X \neq 0) = 1$, to $(X_n Y_n)$ nie jest zbieżny według rozkładu.

4. Niech (X_n) będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie Cauchy'ego. Wyznaczyć gęstość zmiennej losowej

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_{100}}{10}.$$

5. Załóżmy, że φ jest funkcją charakterystyczną pewnego rozkładu w $\mathbb{R}$. Czy wynika stąd, że

a) $\mathrm{Re}\varphi+\mathrm{Im}\varphi$,

b) $e^{\varphi-1}$,

c) e^{φ^4-1},

d) $\frac{2}{\varphi^2+1}$,

jest funkcją charakterystyczną pewnego rozkładu na prostej?

6. Dane są ciągi (X_n), (Y_n) zmiennych losowych, przy czym dla $n \geq 1$ zmienne X_n oraz Y_n są niezależne, X_n ma rozkład Poissona z parametrem $1 + 2/n$, a Y_n ma rozkład jednostajny na odcinku $[-n, n+2]$. Czy ciągi $(2^{Y_n/n} X_n)$, $(X_n + e^{-Y_n^2})$ są zbieżne według rozkładu? Dla jakich wartości parametru $\alpha \in \mathbb{R}$, ciąg $(\frac{X_n + Y_n}{n^\alpha})$ jest zbieżny?

7. Zmienne losowe (ε_n) są niezależne i mają ten sam rozkład $\mathbb{P}(\varepsilon_n = -1) = \mathbb{P}(\varepsilon_n = 1) = 1/2$. Czy ciąg

$$\frac{\sum_{i<j\leq n} \varepsilon_i \varepsilon_j}{n}, \qquad n = 2, 3, \ldots,$$

jest zbieżny według rozkładu? Jeśli tak, wyznaczyć rozkład graniczny.