Zadania na czwartą kartkówkę

1. Dany jest ciąg (X_n) zmiennych losowych, adaptowany do pewnej filtracji $(\mathcal{F}_n)$. Niech

$$\tau = \inf\{n > 5 : X_n + n \leq X_{n-1}\}.$$

Czy τ jest momentem zatrzymania względem tej filtracji?

2. Załóżmy, że X_1, X_2, ... są niezależne i mają ten sam rozkład $\mathbb{P}(X_n = 1) = p$, $\mathbb{P}(X_n = -1) = 1 - p$, gdzie $p > 1/2$ jest ustalone. Niech $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ dla $n \geq 1$. Dla ustalonych $a, b \in \{1, 2, \ldots\}$, niech $\tau_{a,b} = \inf\{n : S_n \in \{-a, b\}\}$.

a) Wyznaczyć rozkład zmiennej $S_{\tau_{a,b}}$.

b) Obliczyć $\mathbb{E}\tau_{a,b}$.

3. Zmienne losowe X_0, X_1, X_2, ... są niezależne i mają średnią 0. Niech $Z_0 = 0$ oraz $Z_n = X_0X_1 + X_1X_2 + \ldots + X_{n-1}X_n$ dla $n \geq 1$. Udowodnić, że (Z_n) jest martyngałem.

4. Zmienne losowe X_1, X_2, ... są niezależne i mają ten sam rozkład zadany przez $\mathbb{P}(X_n = 1/2) = \mathbb{P}(X_n = 3/2) = 1/2$. Udowodnić, że ciąg $(X_1X_2 \ldots X_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny p.n., ale nie jest zbieżny w L^1.

5. Niech (S_n) będzie symetrycznym błądzeniem losowym po liczbach całkowitych i $\tau = \inf\{n : S_n - n/2 = a\}$, gdzie a jest ustaloną liczbą całkowitą dodatnią. Wykorzystując nadmartyngał wykładniczy $(\exp(\lambda S_n - \lambda^2 n/2))_{n=0,1,2,\ldots}$, podać oszacowanie z góry na $\mathbb{P}(\tau < \infty)$.

6. Niech (S_n) będzie błądzeniem losowym po liczbach całkowitych (niekoniecznie symetrycznym). Czy (S_n/n) jest łańcuchem Markowa? Czy ciąg $(S_n \bmod 5)$ jest łańcuchem Markowa?

7. Po wierzchołkach czworościanu foremnego $ABCD$ porusza się pionek, w każdym ruchu przeskakując do jednego z sąsiadujących wierzchołków z prawdopodobieństwem 1/3. W chwili 0 pionek znajduje się w punkcie A.

a) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że pionek dojdzie do punktu D przed dotarciem do punktu C?

b) Obliczyć średni czas oczekiwania na dojście pionka do punktu D.

c) Obliczyć średni czas oczekiwania na powrót pionka do punktu A.

d) Wyznaczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że po 10000 ruchów pionek będzie w punkcie A.

8. Rzucamy kostką aż do momentu, gdy wyrzucimy dwie nieparzyste liczby oczek pod rząd lub szóstkę. Obliczyć wartość oczekiwaną liczby rzutów oraz wartość oczekiwaną liczby wyrzuconych czwórek.

9. Dany jest łańcuch Markowa (X_n) na przestrzeni stanów $E = \{1, 2, 3, 4\}$, o macierzy przejścia

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Czy łańcuch jest nieprzywiedlny?

b) Czy łańcuch jest okresowy?

c) Jakie jest prawdopodobieństwo przejścia ze stanu 3 do stanu 3 w dwóch krokach?

d) Załóżmy, że $X_0 = 1$. Obliczyć średni czas oczekiwania na powrót do stanu 1 oraz prawdopodobieństwo tego, że łańcuch dojdzie do stanu 4 przed dojściem do stanu 2.