Zadania na trzecią kartkówkę

1. Losujemy 1000 liczb z odcinka $[0, 9]$, przy czym każdą z nich zaokrąglamy do najbliższej liczby całkowitej. Jakie jest przybliżone prawdopodobieństwo tego, że wśród otrzymanych liczb co najmniej 550 to liczby nieparzyste?

2. Po liczbach całkowitych porusza się pionek. W każdym ruchu rzucamy kostką; jeśli wypadnie dwójka, to przesuwamy pionek o 1 w lewo, a jeśli piątka - o 1 w prawo. Jeśli wypadnie inna liczba oczek, pionek nie zmienia położenia. Wyznaczyć przedział (możliwie krótki), w którym z prawdopodobieństwem $\geq 0,95$ będzie znajdował się pionek po 1200 ruchach.

3. Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, Y_1, Y_2, \ldots$ są niezależne, przy czym dla każdego $n \geq 1$, zmienna X_n ma rozkład wykładniczy z parametrem 2, Y_{2n-1} ma rozkład jednostajny na odcinku $[-1, 1]$, a Y_{2n} ma rozkład normalny o średniej 0 i wariancji 1. Czy ciąg

$$\frac{X_1Y_1 + X_2Y_2 + \ldots + X_nY_n}{\sqrt{n}}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

jest zbieżny według rozkładu? Jeśli tak, wyznaczyć rozkład graniczny.

4. Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne i mają rozkład normalny o średniej 0 i wariancji 1/2. Wyznaczyć

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2}{\sqrt{(X_1+X_2)^2 + (X_2+X_3)^2 + \ldots + (X_n+X_{n+1})^2}} \geq \frac{\sqrt{n}}{2} + 1 \right).$$

5. Dla $n \geq 1$, zmienna losowa X_n ma rozkład $\Gamma(1, \sqrt{n})$, tzn. z gęstością

$$g_n(x) = \frac{x^{\sqrt{n}-1}e^{-x}}{\Gamma(\sqrt{n})} 1_{[0,\infty)}(x).$$

Czy ciąg

$$\frac{X_n - \sqrt{n}}{\sqrt[4]{n}}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

jest zbieżny według rozkładu? Jeśli tak, wyznaczyć rozkład graniczny.

6. Zmienne losowe X, Y są niezależne i mają rozkłady geometryczne z parametrami $2/3$, $1/2$, odpowiednio. Wyznaczyć $\mathbb{E}(2^X \,|\, \min(X,Y))$.

7. Wiadomo, że p procent monet stanowią monety fałszywe, z orłem po obu stronach. Losujemy ze zwracaniem n monet i każdą z nich wykonujemy rzut. Niech F oznacza liczbę losowań, w wyniku których wyciągnięto monetę fałszywą, O - liczba wyrzuconych orłów. Udowodnić, że $\mathbb{E}(F|O) = \frac{2p}{100+p}O$.

8. Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy z parametrem 1, zaś Y jest zmienną losową taką, że jeśli $X = x$, to Y ma rozkład wykładniczy z parametrem x.

a) Wyznaczyć rozkład Y.

b) Obliczyć $\mathbb{P}(X > r|Y)$.

9. Zmienna losowa (X,Y) ma rozkład z gęstością

$$g(x,y) = \frac{1}{4} 1_{\{(x,y):|y|\leq x\leq 2\}}.$$

Wyznaczyć $\mathbb{E}(X|Y)$ oraz $\mathbb{E}(X|[Y])$.