Zadania na pierwszą kartówkę, RP2 2009/2010

1. Dany jest ciąg (a_n) liczb dodatnich zbieżny do 0, oraz ciąg (X_n) zmiennych losowych takich, że dla $n \geq 1$, X_n ma rozkład geometryczny z parametrem p_n. Udowodnić, że jeśli $p_n/a_n \to \lambda > 0$, to $a_n X_n \Rightarrow$Exp(λ).

2. Niech S będzie przeliczalnym podzbiorem $\mathbb{R}^N$, zaś μ_n, μ - miarami probabilistycznymi skupionymi na S. Wykazać, że jeśli dla każdego $x \in S$ mamy $\mu_n(\{x\}) \to \mu(\{x\})$, to $\mu_n \Rightarrow \mu$.

3. Dany jest ciąg (X_n) niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0,2]$. Czy ciąg $(n \min_{k \leq n} X_k)_n$ jes zbieżny według rozkładu? Jeśli tak, to do jakiej granicy?

4. Załóżmy, że (X_n) zbiega według rozkładu do X i $\sup_n \mathbb{E}|X_n|^2 < \infty$. Udowodnić, że dla $p \in (0,2)$ zachodzi $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}|X_n|^p = \mathbb{E}|X|^p$.

5. Załóżmy, że X_n, X, Y_n, Y $(n = 1, 2, \ldots)$ są zmiennymi losowymi określonymi na tej samej przestrzeni probabilistycznej. Udowodnić, że jeśli (X_n) zbiega według rozkładu do X i (Y_n) zbiega według rozkładu do Y stałej p.n., to $(X_n Y_n)$ zbiega według rozkładu do XY.

6. Dany jest ciąg (X_n) zmiennych losowych o tej własności, że $(\sin X_n)$ oraz $(\sin \pi X_n)$ zbiegają według rozkładu do 0. Udowodnić, że (X_n) zbiega według rozkładu do 0.

7. Rozstrzygnąć, czy funkcja

$$\phi(t) = \frac{e^{-t^2}}{1 + \sin^2 t}$$

jest funkcją charakterystyczną pewnego rozkładu na prostej.

8. Rozstrzygnąć, czy funkcja

$$\phi(t) = \frac{\cos t}{1 + t^2}$$

jest funkcją charakterystyczną pewnego rozkładu na prostej.

9. Zmienne losowe X_1, X_2, $\ldots$ są niezależne i mają rozkład jednostajny na przedziale $[-3,3]$. Niech $\tau = \inf\{n \geq 1 : X_n \geq 0\}$. Wyznaczyć funkcję charakterystyczną zmiennej X_τ.