Zadania na czwartą kartówkę, RP II 2022/2023

1. Dany jest ciąg $(X_n)_{n\geq 0}$ zmiennych losowych, adaptowany do pewnej filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. Rozstrzygnąć, czy $\sigma = \inf\{n > 0 : X_n X_{n+1} \geq 2013\}$ jest momentem zatrzymania względem tej filtracji.

2. Zmienne X_1, X_2, ..., są niezależne i mają ten sam rozkład

$$\mathbb{P}(X_n = -1) = \mathbb{P}(X_n = 1) = p, \qquad \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - 2p,$$

dla pewnego ustalonego $p \in (0, 1/2)$. Niech $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ dla $n \geq 1$. Dla ustalonych $a, b \in \{1, 2, \ldots\}$, niech $\tau_{a,b} = \inf\{n : S_n \in \{-a, b\}\}$. Dowieść, że $\tau_{a,b}$ jest skończony prawie na pewno i wyznaczyć rozkład zmiennej $S_{\tau_{a,b}}$.

3. Zmienne X_1, X_2, ..., są niezależne i mają ten sam rozkład

$$\mathbb{P}(X_n = -1) = \frac{2}{3}, \qquad \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{3}.$$

Niech $S_0 = 0$ oraz $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ dla $n \geq 1$. Zdefiniujmy $\tau = \inf\{n : S_n = 1\}$. Obliczyć $\mathbb{P}(\tau < \infty)$.

4. Załóżmy, że α jest ustaloną liczbą dodatnią. Zmienne losowe X_0, X_1, X_2, ... są niezależne i mają rozkład jednostajny na $[-\frac{1}{n^\alpha}, \frac{1}{n^\alpha}]$. Dla jakich wartości parametru α szereg $\sum_{n=0}^{\infty} X_n X_{n+1}$ jest zbieżny w L^2? Czy wówczas szereg ten zbiega p.n.?

5. Niech $(S_n)_{n\geq 0}$ będzie symetrycznym błądzeniem losowym po liczbach całkowitych startującym z zera, i niech $\tau = \inf\{n : S_n - n/2 = a\}$, gdzie a jest ustaloną liczbą całkowitą dodatnią. Wykorzystując nadmartyngał wykładniczy $(\exp(\lambda S_n - \lambda^2 n/2))_{n=0,1,2,\ldots}$, podać oszacowanie z góry na $\mathbb{P}(\tau < \infty)$.

6. Dany jest martyngał $(M_n)_{n\geq 0}$ ograniczony w $L^{3/2}$. Dowieść, że dla dowolnego skończonego momentu zatrzymania τ zachodzi równość $\mathbb{E}M_\tau = \mathbb{E}M_0$.

7. Niech X_1, X_2, ... będą niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że X_n ma rozkład Poissona z parametrem n^2. Wykazać, że ciąg

$$M_n = (n!)^{-2} X_1 X_2 \ldots X_n, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

jest martyngałem względem filtracji generowanej przez $(X_n)_{n\geq 1}$. Czy $(M_n)_{n\geq 1}$ jest zbieżny prawie na pewno? Czy jest zbieżny w L^2? Czy jest zbieżny w L^1?

8. Dany jest łańcuch Markowa (X_n) na przestrzeni stanów $E = \{1, 2, 3, 4\}$, o macierzy przejścia

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Czy łańcuch jest nieprzywiedlny?

b) Czy łańcuch jest okresowy?

c) Załóżmy, że $X_0 = 1$ p.n. Obliczyć wartość oczekiwaną liczby kroków, po których łańcuch po raz pierwszy odwiedzi stan 4.

d) Załóżmy, że $X_0 = 1$ p.n. Obliczyć, ile średnio razy zostanie odwiedzony stan 2 przed pierwszym dojściem do stanu 4.

9. Rzucamy kostką aż do momentu, gdy wyrzucimy dwie nieparzyste liczby oczek z rzędu lub szóstkę. Obliczyć wartość oczekiwaną liczby rzutów.