**Zadania na pierwszą kartówkę, RP II 2022/2023**

**1.** Dany jest ciąg $(a_n)_{n\geq 1}$ liczb dodatnich zbieżny do 0, oraz ciąg $(X_n)_{n\geq 1}$ zmiennych losowych takich, że dla $n \geq 1$, $X_n$ ma rozkład geometryczny z parametrem $p_n$. Udowodnić, że jeśli $p_n/a_n \to \lambda > 0$, to $a_n X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathrm{Exp}(\lambda)$.

**2.** Dany jest ciąg $(X_n)_{n\geq 1}$ niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0, 2]$. Czy ciąg $(n \min_{k\leq n} X_k)_{n\geq 1}$ jest zbieżny według rozkładu? Jeśli tak, to do jakiej granicy?

**3.** Dany jest ciąg $(X_n)_{n\geq 1}$ niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0, 2]$. Czy ciąg $(n \max_{k\leq n} X_k)_{n\geq 1}$ jest zbieżny według rozkładu? Jeśli tak, to do jakiej granicy?

**4.** Niezależne zmienne losowe $X_1$, $X_2$, … zbiegają według rozkładu do zmiennej o rozkładzie wykładniczym z parametrem 2. Czy zmienne $Y_n = \min\{X_n, 5X_{n+1}\}$, $n = 1, 2, \ldots$, są zbieżne według rozkładu? Jeśli tak, to do jakiej granicy?

**5.** Ciąg $(X_n)_{n\geq 1}$ zbiega według rozkładu do zmiennej o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0, 2]$. Czy wynika stąd, że zmienne $\mathrm{sgn}(5X_n - 3)$, $n = 1, 2, \ldots$, zbiegają według rozkładu? Jeśli tak, to do jakiej granicy?

**6.** Załóżmy, że $X_n$, $X$, $Y_n$, $Y$ $(n = 1, 2, \ldots)$ są zmiennymi losowymi określonymi na tej samej przestrzeni probabilistycznej. Udowodnić, że jeśli $(X_n)_{n\geq 1}$ zbiega według rozkładu do $X$ i $(Y_n)_{n\geq 1}$ zbiega według rozkładu do $Y$ stałej p.n., to $(X_n Y_n)_{n\geq 1}$ zbiega według rozkładu do $XY$.

**7.** Dane są dwa ciągi $(X_n)_{n\geq 1}$, $(Y_n)_{n\geq 1}$ zmiennych losowych, przy czym dla dowolnego $n \geq 1$ rozkład $X_n$ jest zadany przez

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = 1 - \frac{1}{n}, \qquad \mathbb{P}\left(X_n = \frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n^2}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$$

a rozkład $Y_n$ ma gęstość $g_n(x) = 1_{[0,n^{-1}]}(x) + 1_{[1,2-n^{-1}]}(x)$. Dowieść, że ciąg $(\sin X_n + 2Y_n)_{n\geq 1}$ jest zbieżny według rozkładu i wyznaczyć rozkład graniczny.

**8.** Wykazać, że ciąg rozkładów normalnych $(\mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2))_{n\geq 1}$ zbiega według rozkładu do $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $m_n \to m$ oraz $\sigma_n^2 \to \sigma^2$.

**9.** Dany jest ciąg $(X_n)_{n\geq 1}$ zmiennych dodatnich. Wykazać, że ciąg ten zbiega według rozkładu do zmiennej o rozkładzie jednostajnym na $[0, 1]$ wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg $(-\ln X_n)_{n\geq 1}$ zbiega według rozkładu do zmiennej o rozkładzie wykładniczym z parametrem 1.

**10.** Załóżmy, że $(X_n)_{n\geq 1}$ zbiega według rozkładu do $X$ i $\sup_n \mathbb{E}|X_n|^2 < \infty$. Udowodnić, że dla $p \in (0, 2)$ zachodzi $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}|X_n|^p = \mathbb{E}|X|^p$.