Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II - seria 9

1. Załóżmy, że $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ jest filtracją, a $(X_n)_{n\geq 0}$ jest ciągiem zmiennych losowych adaptowanych do tej filtracji. Niech B będzie podzbiorem borelowskim $\mathbb{R}$.

a) Udowodnić, że $\tau_1 = \inf\{n : X_n + n \in B\}$ jest momentem zatrzymania.

b) Udowodnić, że dla dowolnego momentu zatrzymania τ, zmienna $\tau_2 = \inf\{n > \tau : X_n \in B\}$ też jest momentem zatrzymania.

2. Dany jest ciąg $(X_n)_{n=1}^{10}$ niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $\mathbb{P}(X_n = -1) = \mathbb{P}(X_n = 1) = 1/2$. Niech

$$\tau = \inf\{n > 1 : X_n > X_{n-1}\}, \qquad \sigma = \sup\{n \geq 1 : X_n > X_{n-1}\}$$

(przyjmujemy $\inf\emptyset = \sup\emptyset = \infty$). Czy τ, σ są momentami zatrzymania?

3. Zmienne τ, σ są momentami zatrzymania względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. Czy zmienne τ^2, $\tau + 1$, $\tau + \sigma$, $\tau - 1$, $\tau \wedge (2\sigma)$ są momentami zatrzymania?

4. Dany jest ciąg $(\xi_n)_{n\geq 1}$ niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie $\mathbb{P}(\xi_n = -1) = \mathbb{P}(\xi_n = 1) = 1/2$. Niech $X_0 = 0$ i $X_n = \xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n$ dla $n \geq 1$. Niech $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ będzie naturalną filtracją generowaną przez ciąg $(X_n)_{n\geq 0}$.

a) Udowodnić, że $(X_n)_{n\geq 0}$ oraz $(X_n^2 - n)_{n\geq 0}$ są martyngałami.

b) Wyznaczyć taką wartość parametru a, by ciąg $(a^n \cos X_n)_{n\geq 0}$ był martyngałem.

c) Udowodnić, że dla $\lambda > 0$, ciąg $(\exp(\lambda X_n - \lambda^2 n/2))_{n\geq 0}$ jest nadmartyngałem.

5. Załóżmy, że $(X_n)_{n\geq 1}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o średniej 1. Niech $Z_0 = 1$ oraz $Z_n = X_1X_2\ldots X_n$ dla $n \geq 1$. Udowodnić, że ciąg $(Z_n)_{n\geq 0}$ jest martyngałem oraz $(Z_n^2)_{n\geq 0}$ jest podmartyngałem względem pewnej filtracji.

6. Egzaminator przygotował m zestawów pytań. Studenci kolejno losują kartki z pytaniami, przy czym zestaw raz wyciągnięty nie wraca do ponownego losowania. Student nauczył się odpowiedzi na k zestawów ($k \leq m$). Obserwując przebieg egzaminu chce przystąpić do niego w takim momencie, żeby zmaksymalizować szanse zdania. Czy istnieje strategia optymalna?