Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II - seria 7

1. Rzucono 1000 razy kostką. Oszacować prawdopodobieństwo, że suma wyrzuconych oczek będzie zawarta między 3410 a 3590.

2. Sumujemy 10 000 liczb, każdą zaokrągloną z dokładnością do 10^{-m}. Przypuśćmy, że błędy spowodowane przez zaokrąglenia są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na przedziale $(-10^m/2, 10^m/2)$. Znaleźć przedział (możliwie krótki), do którego z prawdopodobieństwem $\geq 0,95$ będzie należał błąd całkowity (tzn. po zsumowaniu).

3. Rzucono 900 razy kostką. Sumujemy oddzielnie parzyste liczby oczek i nieparzyste liczby oczek. Jakie jest przybliżone prawdopodobieństwo tego, że suma parzystych liczb oczek będzie o co najmniej 500 większa od sumy nieparzystych liczb oczek?

4. Na podstawie losowej próby szacujemy procent dorosłych osób popierających pewną partię polityczną. Chcemy, by błąd był mniejszy niż 1% z prawdopodobieństwem 0.95. Ile w tym celu musimy przepytać osób? Jak zmieni się odpowiedź, jeśli wiemy, że partię popiera nie więcej niż 10% wyborców?

5. W urnie znajduje się jedna czarna kula. Wykonujemy następujący ciąg losowań: w każdym losowaniu ciągniemy kulę z urny, oglądamy ją, wrzucamy z powrotem oraz dorzucamy białą kulę. Dla $n \geq 1$, niech X_n oznacza liczbę losowań, w których wyciągnęliśmy czarną kulę. Zbadać zbieżność według rozkładu ciągu

$$\frac{X_n - \ln n}{\sqrt{\ln n}}, \qquad n = 2, 3, \ldots.$$

6. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}.$$

7. Załóżmy, że X jest zmienną losową spełniającą warunki
(i) $\mathbb{E}X^2 < \infty$,
(ii) Jeśli Y, Z są niezależne i mają ten sam rozkład co X, to $X \sim (Y+Z)/\sqrt{2}$.
Wykazać, że X ma rozkład Gaussa o średniej 0.

8. Dany jest ciąg $X_1, X_2, \ldots$ niezależnych d-wymiarowych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie, całkowalnych z kwadratem. Wykazać, że ciąg

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n - n\mathbb{E}X_1}{\sqrt{n}}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

zbiega według rozkładu do zmiennej o rozkładzie Gaussa.

9. Ciąg dystrybuant $(F_n)_{n\geq 1}$ zbiega punktowo do dystrybuanty ciągłej F. Wykazać, że zbieżność jest jednostajna.

10. Dany jest ciąg $(X_n)_{n\geq 1}$ niezależnych, scentrowanych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie, całkowalnych z kwadratem. Zbadać zbieżność według rozkładu ciągu

$$\frac{X_1}{\sqrt{n+1}} + \frac{X_2}{\sqrt{n+2}} + \ldots + \frac{X_n}{\sqrt{n+n}}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$