Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II - seria 6

1. Dowieść, że $B(n, \frac{1}{n}) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathrm{Pois}(1)$.

2. Dany jest ciąg (X_n) niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie, zadanym przez $\mathbb{P}(X_n = 0) = \mathbb{P}(X_n = 1) = 1/2$. Wykazać, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} X_n$ jest zbieżny p.n. i wyznaczyć rozkład sumy tego szeregu.

3. Załóżmy, że $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła funkcją parzystą, wypukłą na $[0, \infty)$, spełniającą $\varphi(0) = 1$ oraz $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = a \geq 0$. Dowieść, że φ jest funkcją charakterystyczną pewnego rozkładu na $\mathbb{R}$.

4. Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne, przy czym dla $n \geq 1$, $\mathbb{P}(X_n = n) = \mathbb{P}(X_n = -n) = 1/2$. Niech $s_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var} X_k$. Czy ciąg zmiennych losowych

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{s_n}$$

jest zbieżny według rozkładu, a jeśli tak, to do jakiej granicy?

5. Dany jest ciąg $(X_n)_{n\geq 1}$ niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie wykładniczym z parametrem 1. Zbadać zbieżność według rozkładu ciągu

$$\frac{X_1 + 2X_2 + \ldots + nX_n}{n^{3/2}} - \frac{\sqrt{n}}{2}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

6. Dany jest ciąg (X_n) niezależnych zmiennych losowych, przy czym dla $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}(X_n = -1) = \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right), \ \mathbb{P}(X_n = -n) = \mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{2n^2}.$$

Udowodnić, że

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{\sqrt{n}} \Rightarrow \mathcal{N}(0, 1),$$

mimo iż nie jest spełniony warunek Lindeberga.