Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II - seria 2

1. Dany jest ciąg (X_n) zmiennych losowych przyjmujących wartości w przedziale $[0,1]$. Udowodnić, że jeśli dla każdego $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ mamy $\mathbb{E}X_n^k \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{k+1}$, to (X_n) jest zbieżny według rozkładu.

2. Załóżmy, że (X_n) jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie Cauchy'ego, tzn. z gęstością

$$g(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Udowodnić, że $\frac{1}{n}\max_{k\le n} X_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \frac{1}{T}$, gdzie T ma rozkład wykładniczy. Wyznaczyć parametr tego rozkładu.

3. Załóżmy, że ciąg (X_n) zbiega według rozkładu do X. Niech $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie taką funkcją borelowską, że $\mathbb{P}(X \in \{\text{punkty nieciągłości } h\}) = 0$.
(i) Udowodnić, że $h(X_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} h(X)$.
(ii) Udowodnić, że jeśli h jest dodatkowo ograniczona, to $\mathbb{E}h(X_n) \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{E}h(X)$.

4. Załóżmy, że ciąg (X_n) zbiega według rozkładu do X. Udowodnić, że
(i) $\mathbb{E}|X| \le \liminf_n \mathbb{E}|X_n|$.
(ii) jeśli $X_1,\ X_2,$ są dodatkowo jednostajnie całkowalne, to $\mathbb{E}X_n \to \mathbb{E}X$.

5. Dane są dwa ciągi (X_n) oraz (Y_n) zmiennych losowych, zbieżnych według rozkładu do X oraz Y, odpowiednio.
(i) Czy (X_n, Y_n) zbiega według rozkładu do (X, Y)?
(ii) Jaka jest odpowiedź w (i) jeśli dodatkowo przy każdym n zmienne X_n oraz Y_n są niezależne, oraz X i Y są niezależne?

6. Jaki warunek musi spełniać
(i) rodzina $(\mathcal{U}(a,b))_{a,b}$ rozkładów jednostajnych,
(ii) rodzina $(\mathcal{N}(m,\sigma^2))_{m,\sigma^2}$ rozkładów normalnych,
by był spełniony warunek ciasności?