Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II - seria 11

1. Dany jest ciąg zmiennych losowych $(X_n)_{n\geq 0}$ o wartościach całkowitych taki, że $X_0 = 0$, $|X_n - X_{n-1}| \leq 1$ p.n., $\limsup_{n\to\infty} |X_n| = \infty$ p.n. oraz $(X_n^2 - \frac{1}{10}n)_{n\geq 0}$ jest martyngałem względem pewnej filtracji. Niech $\tau = \inf\{n : |X_n| = 5\}$. Obliczyć $\mathbb{E}\tau$.

2. Zbadać zbieżność p.n. oraz w L^p nadmartyngału $(\exp(S_n - n/2))_{n=0}^{\infty}$.

3. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$, są niezależne i mają ten sam rozkład skoncentrowany na liczbach nieujemnych, różny od $\delta_{\{1\}}$, o średniej 1. Udowodnić, że ciąg $(X_1 X_2 \ldots X_n)$ jest zbieżny p.n., ale nie jest zbieżny w L^1.

4. W pojemniku znajduje się pewna liczba cząstek, z których każda w chwili n z równym prawdopodobieństwem albo dzieli się na dwie, albo ginie. W chwili 0 liczba cząstek wynosi 1. Udowodnić, że z prawdopodobieństwem 1 po pewnym czasie wszystkie cząstki zginą, tzn. w pojemniku nie będzie ani jednej cząstki.

5. Gramy w orła i reszkę symetryczną monetą. Przed n-tą grą, opierając się ewentualnie na wynikach poprzednich gier, sami ustalamy stawkę w n-tej grze: wybieramy V_n, $1 \leq V_n \leq a$, i jeśli wypadnie orzeł dostajemy V_n zł, jeśli reszka - płacimy V_n zł. Niech S_n oznacza łączną wygraną po n grach. Udowodnić, że $(S_n)_{n\geq 0}$ jest martyngałem (względem naturalnej filtracji).

6. Mamy 10 zł w monetach 1 zł, a potrzebujemy pilnie 20 zł. Jedynym sposobem zdobycia tych pieniędzy jest gra w 3 karty z szulerem (który wygrywa z prawdopodobieństwem 2/3). Szuler gotów jest grać z nami wiele razy o dowolne stawki, jakie jesteśmy w stanie założyć (przyjmijmy dla uproszczenia, że stawka nie przekracza 10 zł). Udowodnić, że niezależnie od wyboru strategii nasze szanse na uzyskanie brakujących 10 zł nie przekraczają 1/3.