Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II - seria 10

W zadaniach 1 - 3 poniżej rozpatrujemy ciąg X_1, X_2, ... niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $\mathbb{P}(X_n = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_n = -1)$, i oznaczamy $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ dla $n \geq 1$. Dla $a, b \in \mathbb{Z}$, $a, b > 0$, niech $\tau_a = \inf\{n : S_n = a\}$ oraz $\tau_{a,b} = \inf\{n : S_n \in \{-a, b\}\}$.

1. Załóżmy, że $p = 1/2$. Korzystając z teorii martyngałów obliczyć $\mathbb{P}(S_{\tau_{a,b}} = -a)$, $\mathbb{P}(S_{\tau_{a,b}} = b)$, $\mathbb{E}\tau_{a,b}$ oraz $\mathbb{E}\tau_a$.

2. Rozwiązać zadanie 1 przy założeniu $1/2 < p < 1$.

3. Załóżmy, że $p = 1/2$ oraz τ jest całkowalnym momentem zatrzymania. Udowodnić, że $\mathbb{E}S_\tau = 0$ oraz $\mathbb{E}S_\tau^2 = \mathbb{E}\tau$.

4. Dany jest ciąg (X_n) całkowalnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie, adaptowany do filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n=1,2,\ldots}$, taki, że zmienna X_{n+1} jest niezależna od $\mathcal{F}_n$. Udowodnić, że dla dowolnego momentu zatrzymania τ takiego, że $\mathbb{E}\tau < \infty$, zachodzi wzór

$$\mathbb{E}(X_1 + X_2 + \ldots + X_\tau) = \mathbb{E}X_1 \cdot \mathbb{E}\tau.$$