

## Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II - seria 1

1. Udowodnić, że ciąg  $(\text{Exp}(n/(n+1)))$  jest zbieżny według rozkładu do  $\text{Exp}(1)$ .
2. Dany jest ciąg  $(X_n)$  zmiennych losowych zbieżny według rozkładu do zmiennej losowej  $X$ . Udowodnić, że ciąg  $(\sin X_n)$  jest zbieżny według rozkładu do zmiennej  $\sin X$ .
3. Czy zmienne losowe posiadające gęstość mogą zbiegać według rozkładu do zmiennej o rozkładzie dyskretnym? Czy zmienne losowe o rozkładach dyskretnych mogą zbiegać do zmiennej o rozkładzie ciągłym?
4. Niech  $X_1, X_2, \dots$  będą zmiennymi losowymi, przy czym dla  $n \geq 1$  rozkład zmiennej  $X_n$  określony jest następująco:

$$\mathbb{P}\left(X_n = \frac{j}{n}\right) = \frac{2j}{n(n+1)}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Dowieść, że ciąg  $(X_n)$  jest zbieżny według rozkładu. Wyznaczyć rozkład graniczny.

5. Niech  $B(n, p)$  oznacza rozkład Bernoulliego o  $n$  próbach z prawdopodobieństwem sukcesu  $p$ , a  $\text{Pois}(\lambda)$  - rozkład Poissona z parametrem  $\lambda$ . Wykazać, że jeśli  $np_n \rightarrow \lambda$ , to  $B(n, p_n) \Rightarrow \text{Pois}(\lambda)$ .

6. Zmienne losowe  $X_1, X_2, \dots$  zbiegają według rozkładu do zmiennej  $X$  stałej p.n. Wykazać, że ciąg  $(X_n)$  zbiega do  $X$  według prawdopodobieństwa.

7. Niech  $g_n, g$  oznaczają odpowiednio gęstości rozkładów prawdopodobieństwa  $\mu_n, \mu$  na  $\mathbb{R}^N$ . Udowodnić, że jeśli  $g_n \rightarrow g$  p.w., to  $\mu_n \Rightarrow \mu$ .

8. Niech  $S$  będzie przeliczalnym podzbiorem  $\mathbb{R}^N$ , zaś  $\mu_n, \mu$  - miarami probabilistycznymi skupionymi na  $S$ . Wykazać, że jeśli dla każdego  $x \in S$  mamy  $\mu_n(\{x\}) \rightarrow \mu(\{x\})$ , to  $\mu_n \Rightarrow \mu$ .

9. Dane są ciągi  $(X_n), (Y_n)$  zmiennych losowych, określonych na tej samej przestrzeni probabilistycznej, przy czym  $(X_n)$  zbiega według rozkładu do  $X$ , a  $(Y_n)$  zbiega według rozkładu do zmiennej  $Y$  stałej p.n.. Udowodnić, że  $(X_n + Y_n)$  zbiega według rozkładu do  $X + Y$ . Czy teza pozostaje prawdziwa bez założenia o jednopunktowym rozkładzie  $Y$ ?