RP 2 - zadania na czwartą kartkówkę

1. Dany jest ciąg $(X_n)_{n\geq 0}$ zmiennych losowych, adaptowany do pewnej filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. Rozstrzygnąć, czy
(i) $\tau = \inf\{n > 0 : X_{n-1}X_n \geq 2013\}$,
(ii) $\sigma = \inf\{n > 0 : X_n X_{n+1} \geq 2013\}$
są momentami zatrzymania względem tej filtracji.

2. Zmienne X_1, X_2, ..., są niezależne i mają ten sam rozkład

$$\mathbb{P}(X_n = -1) = \mathbb{P}(X_n = 1) = p, \qquad \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - 2p,$$

dla pewnego ustalonego $p \in (0, 1/2)$. Niech $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ dla $n \geq 1$. Dla ustalonych $a, b \in \{1, 2, \ldots\}$, niech $\tau_{a,b} = \inf\{n : S_n \in \{-a, b\}\}$.
a) Wyznaczyć rozkład zmiennej $S_{\tau_{a,b}}$.
b) Obliczyć $\mathbb{E}\tau_{a,b}$.

3. Zmienne X_1, X_2, ..., są niezależne i mają ten sam rozkład

$$\mathbb{P}(X_n = -1) = \frac{2}{3}, \qquad \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{3}.$$

Niech $S_0 = 0$ oraz $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ dla $n \geq 1$. Zdefiniujmy $\tau = \inf\{n : X_n = 1\}$. Obliczyć $\mathbb{P}(\tau < \infty)$.

4. Załóżmy, że α jest ustaloną liczbą dodatnią. Zmienne losowe X_0, X_1, X_2, ... są niezależne i mają rozkład jednostajny na $[-\frac{1}{n^\alpha}, \frac{1}{n^\alpha}]$. Dla jakich wartości parametru α szereg $\sum_{n=0}^{\infty} X_n X_{n+1}$ jest zbieżny w L^2? Czy wówczas szereg ten zbiega p.n.?

5. Ciąg $(X_n)_{n\geq 0}$ całkowalnych zmiennych losowych jest adaptowany do filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ oraz spełnia $\mathbb{E}X_\tau = 0$ dla każdego ograniczonego momentu zatrzymania τ. Dowieść, że $(X_n)_{n\geq 0}$ jest martyngałem.

6. Niech $(S_n)_{n\geq 0}$ będzie symetrycznym błądzeniem losowym po liczbach całkowitych i $\tau = \inf\{n : S_n - n/2 = a\}$, gdzie a jest ustaloną liczbą całkowitą dodatnią. Wykorzystując nadmartyngał wykładniczy $(\exp(\lambda S_n - \lambda^2 n/2))_{n=0,1,2,\ldots}$, podać oszacowanie z góry na $\mathbb{P}(\tau < \infty)$.

7. Załóżmy, że $(S_n)_{n\geq 0}$ jest błądzeniem symetrycznym po liczbach całkowitych. Rozstrzygnąć, czy ciągi $(S_n^2)_{n\geq 0}$, $((S_n \bmod 5))_{n\geq 0}$ są łańcuchami Markowa. W przypadku odpowiedzi pozytywnej, opisać macierze przejścia.

8. Rzucamy kostką aż do momentu, gdy wyrzucimy dwie nieparzyste liczby oczek pod rząd lub szóstkę. Obliczyć wartość oczekiwaną liczby rzutów oraz wartość oczekiwaną liczby wyrzuconych czwórek.

9. Dany jest łańcuch Markowa (X_n) na przestrzeni stanów $E = \{1, 2, 3, 4\}$, o macierzy przejścia

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Czy łańcuch jest nieprzywiedlny?

b) Czy łańcuch jest okresowy?

c) Jakie jest prawdopodobieństwo przejścia ze stanu 3 do stanu 3 w dwóch krokach?

d) Załóżmy, że $X_0 = 1$. Obliczyć średni czas oczekiwania na powrót do stanu 1 oraz prawdopodobieństwo tego, że łańcuch dojdzie do stanu 4 przed dojściem do stanu 2.

10. W lewym dolnym polu szachownicy 3×3 znajduje się król. Figura ta wykonuje losowy ciąg ruchów, w każdym ruchu przesuwając się (z równym prawdopodobieństwem) na pole sąsiadujące bokiem lub rogiem. Wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że król powróci na pole startowe przed dojściem do środkowego pola szachonicy.