Zadania na trzecią kartkówkę, RP2 2012/2013

1. Dany jest ciąg X_1, X_2, ... niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie: $\mathbb{P}(X_n = 0) = \mathbb{P}(X_n = 2) = 1/4$, $\mathbb{P}(X_n = -1) = 1/2$. Wyznaczyć granicę rozkładów ciągu

$$\frac{4\sqrt{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) - 7n}{n + (X_1 + X_2 + \ldots + X_n)^2}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

2. Dany jest ciąg X_1, X_2, ... niezależnych d-wymiarowych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie takim, że $\mathbb{E}||X_1||^2 < \infty$. Wykazać, że

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n - \mathbb{E}X_1 - \mathbb{E}X_2 - \ldots - \mathbb{E}X_n}{\sqrt{n}}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

zbiega według rozkładu do d-wymiarowego rozkładu Gaussa o średniej 0 i macierzy kowariacji równej macierzy kowariancji X_1.

3. Z bankomatu korzysta dziennie 100 osób. Kwoty gotówki podejmowanej przez poszczególnych klientów są niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu o średniej 300 i odchyleniu standardowym 150. Znaleźć przedział (możliwie krótki), w którym z prawdopodobieństwem $\geq 0,95$ zawierać się będzie całkowita kwota dziennej wypłaty.

4. Pewne urządzenie ma wbudowany bezpiecznik, którego czas bezawaryjnej pracy (liczony w godzinach) ma rozkład wykładniczy z parametrem $1/20$. W przypadku stwierdzenia awarii, technik wymienia uszkodzony bezpiecznik na nowy. Wyznaczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że paczka zawierająca 400 nowych bezpieczników wystarczy na rok pracy urządzenia.

5. Zmienne losowe X i Y są niezależne i mają rozkład wykładniczy z parametrem 1. Obliczyć $\mathbb{E}(5X + 7Y|[X])$ oraz $\mathbb{E}\big([X+Y]\big|[Y]\big)$, gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x.

6. Zmienne X_1, X_2, ..., X_n ($n \geq 3$) są niezależne, przy czym zmienna X_k ma rozkład normalny o średniej m_k i wariancji σ_k^2, $k = 1, 2, \ldots, n$.

a) Obliczyć $\mathbb{E}(X_1 + X_2|X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$ i $\mathbb{E}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n|X_1 + X_2)$.

b) Obliczyć $\mathbb{E}(X_1X_2|X_1 + X_2)$.

7. Dany jest ciąg $(X_n)_{n\geq 1}$ niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[-1, 1]$. Definiujemy zmienną N wzorem $N = \inf\{n \geq 1 : X_n \geq 0\}$. Obliczyć $\mathbb{E}\min\{X_1, X_2, \ldots, X_N\}$.

8. Zmienne losowe X, Y są niezależne i mają rozkład Pareto z gęstością $g(x) = 2x^{-3}1_{[1,\infty)}(x)$. Wyznaczyć $\mathbb{E}(X^{1/Y}|Y)$, $\mathbb{E}\big[|X - Y|\big|Y\big]$ oraz $\mathbb{E}(X^2|X + Y)$.

9. Zmienne X_1, X_2, ..., N_1, N_2, ... są niezależne, przy czym dla $n \geq 1$ zmienna X_n ma standardowy rozkład normalny, a N_n ma rozkład Poissona z parametrem n. Udowodnić, że ciąg

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_{N_n}}{\sqrt{n}}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

jest zbieżny według rozkładu i wyznaczyć rozkład graniczny.

Uwaga: Jeśli $N_n = 0$, to przyjmujemy $X_1 + X_2 + \ldots + X_{N_n} = 0$.

10. Wzdłuż prostoliniowej drogi leżą (w tej właśnie kolejności) miasta M_1, M_2, . . ., M_n, $n \geq 2$, przy czym każde miasto jest odległe od poprzedniego o 1 km. Między miastami kursuje ambulans. Przyjmujemy, że w chwili początkowej ambulans może się znajdować w każdym z miast z takim samym prawdopodobieństwem. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że odległość od miasta, do którego się uda przy następnym zgłoszeniu, jest większa niż 2 km?