Zadania na drugą kartkówkę, RP2 2012/2013

1. Rozstrzygnąć, czy suma dwóch niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie może mieć rozkład jednostajny na przedziale $[-1,1]$.

2. Dany jest ciąg $(X_n)_{n\geq 1}$ zmiennych losowych oraz niezależna od niego zmienna Z o standardowym jednowymiarowym rozkładzie normalnym. Udowodnić, że ciąg $(X_n+Z)_{n\geq 1}$ jest zbieżny według rozkładu wtedy i tylko wtedy, gdy $(X_n)_{n\geq 1}$ jest zbieżny według rozkładu.

3. Rozstrzygnąć, czy funkcja

$$\varphi(t)=\begin{cases}\dfrac{\cos t+1}{2} & \text{dla } |t|\leq \pi,\\ 0 & \text{dla } |t|>\pi\end{cases}$$

jest funkcją charakterystyczną pewnego rozkładu na prostej.

4. Załóżmy, że φ jest funkcją charakterystyczną pewnego rozkładu na prostej. Rozstrzygnąć, czy podane niżej funkcje muszą być funkcjami charakterystycznymi pewnego rozkładu:
a) $(\operatorname{Re}\varphi)^2-(\operatorname{Im}\varphi)^2$.
b) $\operatorname{Re}\varphi+\operatorname{Im}\varphi$.
c) e^{φ^2-1}.

5. Funkcja $\varphi:\mathbb{R}\to[-1,1]$ spełnia następujący warunek: $\varphi(t)<-\frac{1}{2012}$ dla $|t|>10$. Dowieść, że φ nie jest funkcją charakterystyczną żadnego rozkładu na prostej.

6. Udowodnić, że funkcja

$$\varphi(t)=\frac{1}{1+|t|},\qquad t\in\mathbb{R},$$

jest funkcją charakterystyczną pewnego rozkładu na prostej.

Wskazówka: Udowodnić najpierw, że jeśli $\psi:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ jest parzysta, kawałkami liniowa, wypukła na $(0,\infty)$ oraz spełnia $\psi(0)=1$, to jest funkcją charakterystyczną. Następnie, skorzystać z twierdzenia Lévy-Cramera.

7. Zmienne X_1, X_2, $\ldots$ są niezależne, przy czym dla $n\geq 1$ zmienna X_n ma rozkład jednostajny na $[0,4n]$. Czy ciąg

$$\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n-n(n+1)}{n^{3/2}},\qquad n=1,\,2,\,\ldots$$

jest zbieżny według rozkładu? W przypadku odpowiedzi pozytywnej, wyznaczyć rozkład graniczny.

8. Dany jest ciąg $(X_n)_{n\geq 1}$ niezależnych zmiennych losowych, przy czym dla $n\geq 1$ zmienna X_n ma rozkład zadany przez

$$\mathbb{P}(X_n=n)=\frac{2}{3}=1-\mathbb{P}(X_n=-2n).$$

Rozstrzygnąć, czy ciąg

$$\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n^{3/2}},\qquad n=1,\,2,\,\ldots,$$

jest zbieżny według rozkładu. W przypadku odpowiedzi pozytywnej, wyznaczyć rozkład graniczny.

9. Dany jest ciąg $(X_n)_{n\geq 1}$ zmiennych losowych (niekoniecznie niezależnych) takich, że dla każdego $n\geq 1$ zmienna X_n ma rozkład $\Gamma(1,n)$, tzn. z gęstością

$$g_n(x)=\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}e^{-x}1_{[0,\infty)}(x).$$

Dowieść, że ciąg

$$\frac{X_n-n}{\sqrt{n}},\qquad n=1,\,2,\,\ldots,$$

jest zbieżny według rozkładu. Wyznaczyć rozkład graniczny.