Zadania na pierwszą kartówkę, RP2 2012/2013

1. Dany jest ciąg $(a_n)_{n\geq 1}$ liczb dodatnich zbieżny do 0, oraz ciąg $(X_n)_{n\geq 1}$ zmiennych losowych takich, że dla $n \geq 1$, X_n ma rozkład geometryczny z parametrem p_n. Udowodnić, że jeśli $p_n/a_n \to \lambda > 0$, to $a_n X_n \Rightarrow$Exp(λ).

2. Jaki warunek musi spełniać zbiór $\Lambda \subset \mathbb{R}_+$, aby rodzina $(\mathcal{U}(0,\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ rozkładów jednostajnych była ciasna?

3. Dany jest ciąg (X_n) niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0,2]$. Czy ciąg $(n \min_{k\leq n} X_k)_{n\geq 1}$ jest zbieżny według rozkładu? Jeśli tak, to do jakiej granicy?

4. Załóżmy, że $(X_n)_{n\geq 1}$ zbiega według rozkładu do X i $\sup_n \mathbb{E}|X_n|^2 < \infty$. Udowodnić, że dla $p \in (0,2)$ zachodzi $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}|X_n|^p = \mathbb{E}|X|^p$.

5. Załóżmy, że X_n, X, Y_n, Y $(n = 1, 2, \ldots)$ są zmiennymi losowymi określonymi na tej samej przestrzeni probabilistycznej. Udowodnić, że jeśli $(X_n)_{n\geq 1}$ zbiega według rozkładu do X i $(Y_n)_{n\geq 1}$ zbiega według rozkładu do Y stałej p.n., to $(X_n Y_n)_{n\geq 1}$ zbiega według rozkładu do XY.

6. Dany jest ciąg $(X_n)_{n\geq 1}$ zbieżny według rozkładu, przy czym $\sin X_n \Rightarrow 0$ oraz $\sin \pi X_n \Rightarrow 0$. Udowodnić, że $X_n \Rightarrow 0$.

7. Dane są dwa ciągi $(X_n)_{n\geq 1}$, $(Y_n)_{n\geq 1}$ zmiennych losowych, przy czym dla dowolnego $n \geq 1$ zmienne X_n oraz Y_n są niezależne,

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = 1 - \frac{1}{n}, \qquad \mathbb{P}\left(X_n = \frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n^2}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$$

a rozkład Y_n ma gęstość

$$g_n = \chi_{[0,n^{-1}]} + \chi_{[1,2-n^{-1}]}.$$

Dowieść, że ciąg $\left((X_n+1)Y_n^{X_n}\right)_{n\geq 1}$ jest zbieżny według rozkładu. Wyznaczyć rozkład graniczny.

8. Rozstrzygnąć, czy funkcja

$$\phi(t) = \frac{e^{-t^2}}{1+\sin^2 t}$$

jest funkcją charakterystyczną pewnego rozkładu na prostej.

9. Rozstrzygnąć, czy funkcja

$$\phi(t) = \frac{\cos t}{1+t^2}$$

jest funkcją charakterystyczną pewnego rozkładu na prostej.