

**Kolokwium z Rachunku Prawdopodobieństwa 2, 8 XII 2012, 10:00,
Grupa A**

Czas: 180 minut. Pełne rozwiązania piszemy na osobnych kartkach wraz z imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu oraz grupą (A lub B). Tablice rozkładu normalnego są niepotrzebne, należy operować jego dystrybuantą.

1. (5p.) W czasie szczytu liczba rozmów łączonych przez pewną centralę telefoniczną w ciągu godziny ma rozkład Bernoulliego z parametrami 600, 1/3. Zakładając niezależność liczby łączonych rozmów w różnych godzinach oszacować prawdopodobieństwo, że centrala połączy w ciągu 300 kolejnych godzin szczytu między 60 a 62 tysiące rozmów.

2. (5p.) Dany jest ciąg $(X_n)_{n \geq 1}$ niezależnych zmiennych losowych, przy czym dla $n \geq 1$ rozkład X_n zadany jest przez równości

$$\mathbb{P}(X_n = 0) = \frac{1}{n}, \quad \mathbb{P}(X_n = 2n) = 1 - \frac{1}{n}.$$

Rozstrzygnąć, czy ciąg

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

jest zbieżny według rozkładu. W przypadku odpowiedzi pozytywnej, wyznaczyć rozkład graniczny.

3. (5p.) Udowodnić, że funkcja $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem

$$\varphi(t) = \frac{1}{2} + \frac{e^{t^2}}{4e^{t^2} - 2}$$

jest funkcją charakterystyczną pewnego rozkładu na prostej.

4. (5p.) Zmienne $X_1, Y_1, X_2, Y_2, \dots$ są niezależne, przy czym dla każdego $n \geq 1$ zmienna X_n ma rozkład jednostajny na przedziale $[-n-5, 4n-5]$, a Y_n ma rozkład Poissona z parametrem $10n$. Rozstrzygnąć, czy ciąg $Z_n = n^{-1} \max\{X_n, Y_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, jest zbieżny według rozkładu. W przypadku odpowiedzi pozytywnej, wyznaczyć rozkład graniczny.

5. (5p.) Zmienne losowe X, Y, Z są niezależne, przy czym $X + Y$ ma ten sam rozkład co Z oraz X ma ten sam rozkład co $Y + Z$. Udowodnić, że $Y = 0$ p.n.

6. Zmienne X_1, X_2, \dots, X_n są niezależne i mają rozkład wykładniczy z parametrem 2.

(1p.) Wyznaczyć rozkład zmiennej $Y = \min\{X_1, X_2, \dots, X_{n-1}\}$.

(4p.) Obliczyć $\mathbb{E}(\min\{X_1, X_2, \dots, X_n\} | X_n)$.