Egzamin poprawkowy z Rachunku Prawdopodobieństwa II, 4 III 2010r.

Czas trwania egzaminu: 120 minut.

1. Dany jest ciąg X_1, X_2, ... niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0,1]$. Niech $\tau = \inf\{n : X_1^3 + X_2^3 + \ldots + X_n^3 \geq 100\}$.

(4p.) Udowodnić, że τ jest momentem zatrzymania (względem naturalnej filtracji) oraz $\tau < \infty$ p.n..

(6p.) Wyznaczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że $\tau \leq 400$.

2. (10p.) Dane są ciągi (X_n), (Y_n) zmiennych losowych, przy czym dla $n \geq 1$, X_n ma rozkład z gęstością

$$g_n(x) = \frac{n}{2} e^{-n|x|+n} 1_{[1,\infty)}(|x|),$$

a rozkład Y_n jest zadany przez

$$\mathbb{P}\left(Y_n = 1 - \frac{1}{n}\right) = \sqrt[n]{\frac{1}{2}} = 1 - \mathbb{P}(Y_n = n).$$

Czy ciąg $(X_n Y_n)$ jest zbieżny według rozkładu? Jeśli tak, to do jakiej granicy?

3. (10p.) Po szachownicy 2×2 porusza się król szachowy. W chwili początkowej król znajduje się w lewym górnym polu, i w każdym ruchu przeskakuje, niezależnie od poprzednich ruchów, do jednego z sąsiednich pól (tzn. graniczących bokiem lub rogiem), przy czym wybór każdego pola jest tak samo prawdopodobny.

(7p.) Jaki jest średni czas oczekiwania na powrót do początkowego pola?

(8p.) Wyznaczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że po 1000 ruchach król będzie w prawym dolnym polu.

4. Dany jest ciąg X_1, X_2, ... niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie zadanym przez $\mathbb{P}(X_n = -1) = \mathbb{P}(X_n = 1) = 1/2$. Ponadto, niech $\tau = \inf\{n : X_1 + X_2 + \ldots + X_n = 1\}$.

(5p.) Jaki warunek muszą spełniać liczby $a \in (0,1)$, $b \in (0,\infty)$, żeby ciąg $Y_n = a^n b^{X_1+X_2+\ldots+X_n}$ był podmartyngałem?

(10p.) Dla dowolnej liczby $a \in (0,1)$, obliczyć $\mathbb{E}a^\tau$.