

Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa II, 20 I 2010

1. (10p.) Zmienne X, Y są niezależne i mają rozkład $\mathcal{N}(0,1)$. Wyznaczyć funkcję charakterystyczną zmiennej XY .

2. Dany jest podmartynał (X_n) .

(10 p.) Udowodnić, że proces (X_n^+) jest podmartynałem.

(5 p.) Udowodnić, że na ogół (X_n^-) nie jest podmartynałem.

3. (15 p.) Dany jest ciąg (X_n) niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie $\mathbb{P}(X_n = -1) = 1/3$, $\mathbb{P}(X_n = 1) = 2/3$. Niech $\tau = \inf\{n : X_1 + X_2 + \dots + X_n = 10 - n\}$. Udowodnić, że $\tau < \infty$ p.n. oraz wyznaczyć $\mathbb{E}\tau$.

4. (10 p.) W urnie I znajduje się 5 białych kul, a w urnie II - 5 czarnych. Wykonujemy następujący ciąg losowań: w każdym ruchu wyciągamy po jednej kuli z każdej urny, a następnie każdą z tych kul wrzucamy do innej urny niż ta, z której pochodzi.

Wyznaczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że po 10000 losowaniach w urnie I będą same czarne kule.