Kilka zadań przygotowawczych

1. Rzucamy nieskończenie wiele razy prawidłową kostką. Niech X, Y, Z oznaczają, odpowiednio, numery rzutów w których pojawiły się pierwsza dwójka, pierwsza trójka i pierwszy nieparzysty numer. Obliczyć $\mathbb{E}\max\{X,Y,Z\}$ oraz $\mathbb{E}(Y|Z)$.

2. Ze względu na złe warunki pogodowe, konkurs skoków narciarskich w Lillehammer będzie składał się tylko z jednej serii, do której zakwalifikowano 30 zawodników, oddających kolejno po jednym skoku. Jeśli wynik danego zawodnika jest lepszy niż poprzednie rezultaty, skoczek zostaje tymczasowym liderem konkursu. Zakładamy, że wszyscy skoczkowie mają te same umiejętności oraz że uzyskanie tego samego wyniku przez dwóch zawodników nie jest możliwe. Niech X oznacza liczbę liderów w konkursie, a Y będzie numerem zwycięskiego zawodnika. Obliczyć $\mathbb{E}X$, $\operatorname{Var}X$ oraz $\mathbb{E}(X|Y)$.

3. Po liczbach całkowitych porusza się pionek, w chwili początkowej znajdujący się w zerze. W n-tym ruchu ($n = 1, 2, \ldots$) pionek skacze do jednej z sąsiadujących liczb całkowitych z prawdopodobieństwami p_n, q_n, odpowiednio (zależącymi od numeru ruchu). Udowodnić, że prawdopodobieństwo tego, że pojawi się nieskończenie wiele serii 2012 kolejnych ruchów w prawo, wynosi 0 lub 1.

4. Zmienna losowa (X,Y) ma rozkład jednostajny na trójkącie o wierzchołkach $(1,0)$, $(0,1)$ oraz $(-1,0)$. Dowieść, że zmienne $X/(1-Y)$ oraz Y są niezależne. Obliczyć $\mathbb{E}(X|Y)$ oraz $\mathbb{E}((2X-Y+1)^2|Y)$.

5. Dany jest ciąg $(X_n)_{n\geq 1}$ niezależnych zmiennych losowych, przy czym dla $n \geq 1$ zmienna X_n ma rozkład jednostajny na $[0,n]$. Czy ciąg

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

jest zbieżny p.n.?

6*. Dany jest ciąg $(X_n)_{n\geq 1}$ niezależnych zmiennych losowych, przy czym dla $n \geq 1$ zmienna X_n ma rozkład Poissona z parametrem n. Dowieść, że ciąg

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n^2}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

jest zbieżny p.n. i wyznaczyć granicę.

7. Zmienne X_1, X_2, $\ldots$ są niezależne, przy czym dla $n \geq 1$ zmienna X_n ma dwustronny rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda_n > 0$, tzn. z gęstością

$$g_n(x) = \frac{1}{2}\lambda_n e^{-\lambda_n |x|}.$$

Jaki warunek musi spełniać ciąg $(\lambda_n)_{n\geq 1}$, by szereg $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ był zbieżny p.n.?

8. Zmienna losowa (X, Y) ma dwuwymiarowy rozkład normalny o średniej $(0,0)$. Udowodnić, że zmienne X, Y są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy X^2 i Y^2 są nieskorelowane.

9. Zmienne X_1, X_2, ... są niezależne, przy czym dla $n \geq 1$ zmienna X_n ma rozkład Bernoulliego z parametrami n, $1/n$.

a) Udowodnić, że $\limsup_{n\to\infty} X_n = \infty$ p.n..

b) Dowieść, że ciąg $(\sqrt[n]{X_n})_{n\geq 1}$ jest zbieżny w L^p dla dowolnego $1 \leq p < \infty$, ale nie jest zbieżny w L^∞.

c) Czy rodzina $\{X_n\}_{n\geq 1}$ jest jednakowo całkowalna?

10. Zmienne losowe X, X_1, X_2, ... przyjmują wartości w przedziale $[0,1]$ i spełniają warunek $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n^p = \mathbb{E}X^p$ dla dowolnego $1 \leq p < \infty$. Dowieść, że dla dowolnej funkcji ciągłej $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ zachodzi zbieżność $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}f(X_n) = \mathbb{E}f(X)$.

11. Rozstrzygnąć, czy istnieją ciągi $(X_n)_{n\geq 1}$ spełniające następujące warunki.

a) Zmienne X_1, X_2, ... są wspólnie ograniczone, $(X_n)_{n\geq 1}$ zbiega w L^1, ale nie zbiega w L^4.

b) $(X_n)_{n\geq 1}$ zbiega w L^2, ale rodzina $\{X_n\}_{n\geq 1}$ nie jest jednostajnie całkowalna.

c) $(X_n)_{n\geq 1}$ zbiega p.n., nie zbiega w L^2, ale zbiega w L^1.

d) Zmienne X_1, X_2, ... są niezależne, mają scentrowane rozkłady normalne, ciąg $(X_n)_{n\geq 1}$ zbiega p.n. do 0, ale nie zbiega w L^2.

12. W wyborach startują politycy A i B, z których każdy ma poparcie co najmniej 30% społeczeństwa. W dniu wyborów przeprowadzamy sondaż na grupie losowych głosujących. Ile osób musi wziąć udział w sondażu, tak by z prawdopodobieństwem $\geq 0,95$ móc przewidzieć wynik wyborów z dokładnością do 1% ?

Zachęcam także do przerobienia zadań kartkówkowych znajdujących się na stronie.