Egzamin poprawkowy z Rachunku Prawdopodobieństwa I, 7 IX 2012 r.

Czas trwania: 180 minut. Rozwiązania różnych zadań prosimy pisać na oddzielnych kartkach, wraz z imieniem, nazwiskiem i numerem indeksu. Tablice rozkładu normalnego są niepotrzebne, należy operować jego dystrybuantą

1. (10p.) W urnie znajdują się trzy prawidłowe kostki oraz jedna fałszywa, z samymi szóstkami. Przeprowadzamy (w sposób niezależny) 240 razy następujące doświadczenie: losujemy kostkę z urny, wykonujemy nią rzut, a następnie wrzucamy ją z powrotem. Wyznaczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że liczba doświadczeń, w których uzyskaliśmy szóstkę, nie przekroczy 100.

2. (10p.) Kwadrat o boku 1 przecięto dwiema losowymi prostymi, poziomą i pionową. Niech X oznacza najmniejsze spośród pól powstałych czterech prostokątów. Wyznaczyć wartość oczekiwaną zmiennej X.

3. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład z gęstością

$$g(x, y) = 2e^{-x-y}1_{\{0<x<y\}}.$$

(5p.) Wyznaczyć wartość oczekiwaną zmiennej $4X + 3$.

(10p.) Obliczyć $\mathbb{E}(Y|X)$.

4. Zmienne losowe X, Y, Z są niezależne i mają standardowy rozkład normalny.

(5p.) Wyznaczyć macierz kowariancji zmiennej $(X + Y, Y + Z)$.

(5p.) Obliczyć $\mathbb{E}(X + Y + Z)^2(X - Y + 1)^2$.

5. Dany jest ciąg $(X_n)_{n\geq 1}$ niezależnych zmiennych losowych, przy czym dla $n \geq 1$ zmienna X_n ma rozkład z gęstością $g_n(x) = nx^{n-1}1_{(0,1]}(x)$.

(5p.) Wyznaczyć rozkład zmiennej X_5^5.

(10p.) Udowodnić, że ciąg $(X_n)_{n\geq 1}$ jest zbieżny prawie na pewno i wyznaczyć jego granicę.

6. (10p.) Zmienne X_1, X_2, ..., Y_1, Y_2, ... są niezależne, przy czym dla $n \geq 1$ zmienna X_n ma rozkład jednostajny na przedziale $[0, n+1]$, a Y_n ma rozkład zadany przez $\mathbb{P}(Y_n = 0) = 1 - \mathbb{P}(Y_n = \frac{1}{n}) = 1/2$. Dowieść, że ciąg

$$\frac{X_1Y_1 + X_2Y_2 + \ldots + X_nY_n}{n}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

jest zbieżny prawie na pewno i wyznaczyć jego granicę.