Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa I, 26 VI 2012, grupa A

Czas trwania: 180 minut. Rozwiązania różnych zadań prosimy pisać na oddzielnych kartkach, wraz z imieniem, nazwiskiem i numerem indeksu. Tablice rozkładu normalnego są niepotrzebne, należy operować jego dystrybuantą

1. 100 osób, wśród których są osoby A i B, ustawia się losowo w kolejce. Niech X oznacza liczbę osób stojących przed A, a Y oznacza liczbę osób stojących za B.
(2p.) Obliczyć $\mathbb{P}(X = 5, Y = 20)$.
(2p.) Obliczyć $\mathbb{E}X$.
(6p.) Obliczyć $\mathbb{E}(X|Y)$.

2. Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład z gęstością
$$g(x, y) = C \exp\left(-2x^2 - 2xy - y^2\right).$$
(2p.) Obliczyć C.
(3p.) Wyznaczyć rozkład zmiennej $2X + Y + 5$.
(5p.) Obliczyć $\mathrm{Cov}(2X + Y + 5, Y)$, $\mathbb{E}(2X + Y + 5|Y)$ oraz $\mathbb{E}(2X + Y + 5)^7 \sin Y$.

3. Dany jest ciąg $(X_n)_{n\geq 2}$ niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie zadanym przez równości $\mathbb{P}(X_n = 2n) = 1 - \mathbb{P}(X_n = 1/n) = 1/(n \ln n)$, $n = 2, 3, \ldots$.
(2p.) Czy ciąg $(X_n)_{n\geq 2}$ jest zbieżny według prawdopodobieństwa?
(3p.) Czy ciąg $(X_n)_{n\geq 2}$ jest zbieżny p.n.?
(3p.) Czy rodzina $\{X_n\}_{n\geq 2}$ jest jednakowo całkowalna?

4. (6p.) Hazardzista o kapitale początkowym 1 uczestniczy w grze składającej się z niezależnych rzutów symetryczną monetą. W przypadku gdy w pojedynczym rzucie wypadnie orzeł, gracz traci połowę swojego kapitału; w przeciwnym razie, jego kapitał ulega podwojeniu. Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że po 10000 rzutach monetą kapitał hazardzisty przekroczy 1024.

5. (8p.) Zmienne X_1, X_2, $\ldots$ są niezależne i mają rozkład wykładniczy z parametrem 3. Dowieść, że ciąg
$$\frac{X_1 \cdot 1_{\{X_1 \leq 1\}} + X_2 \cdot 1_{\{X_2 \leq 2\}} + \ldots + X_n \cdot 1_{\{X_n \leq n\}}}{n}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$
jest zbieżny p.n. i wyznaczyć granicę.

6. (8p.) Dany jest ciąg $(a_n)_{n\geq 1}$ liczb dodatnich oraz ciąg $(X_n)_{n\geq 1}$ takich niezależnych zmiennych losowych, że X_n ma rozkład jednostajny na przedziale $[0, a_n]$, $n = 1, 2, \ldots$. Dowieść, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-3X_n}$ jest zbieżny p.n. wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} < \infty$.