Zadania na czwartą kartkówkę

1. Dany jest ciąg $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ niezależnych zmiennych Rademachera. Dowieść, że ciąg

$$\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^3 + \ldots + \varepsilon_n^n}{n + 1 + \varepsilon_n}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

jest zbieżny p.n. i wyznaczyć jego granicę.

2. Dany jest ciąg $(X_n)_{n\geq 1}$ niezależnych zmiennych losowych, przy czym dla $n \geq 1$ zmienna X_n ma rozkład Poissona z parametrem $1/n^2$.

a) Dowieść, że ciąg

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

jest zbieżny według prawdopodobieństwa i wyznaczyć jego granicę.

b) Dowieść, że ciąg

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

jest zbieżny p.n. i wyznaczyć jego granicę.

3. Dany jest ciąg $(X_n)_{n\geq 1}$ niezależnych zmiennych losowych, przy czym dla $n \geq 1$ zmienna X_n ma rozkład wykładniczy z parametrem $\log(n+1)$. Rozstrzygnąć, czy ciąg

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

jest zbieżny p.n. W przypadku odpowiedzi pozytywnej, wyznaczyć granicę.

4. Dany jest ciąg $(X_n)_{n\geq 1}$ zmiennych losowych (niekoniecznie niezależnych), przy czym dla $n \geq 1$ zmienna X_n ma rozkład $\Gamma(3, n)$. Dowieść, że ciąg $\left(\frac{X_n}{5n}\right)_{n\geq 1}$ jest zbieżny w L^1.

5. Dany jest ciąg $(X_n)_{n\geq 1}$ niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie Cauchy'ego (tzn. o gęstości $g(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$). Udowodnić, że ciąg

$$\frac{X_1 + 2X_2 + \ldots + nX_n}{n}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

jest rozbieżny z prawdopodobieństwem 1.

Wskazówka: dowieść, że warunek Cauchy'ego nie jest spełniony, porównując dwa kolejne wyrazy ciągu średnich.

6. Dany jest ciąg $(X_n)_{n\geq 1}$ niezależnych zmiennych losowych, zbieżny według prawdopodobieństwa do X. Udowodnić, że zmienna X jest stała p.n.

7. Dany jest ciąg $(a_n)_{n\geq 1}$ o wyrazach dodatnich oraz ciąg $(X_n)_{n\geq 0}$ niezależnych zmiennych losowych, przy czym dla $n \geq 1$ zmienna X_n ma rozkład jednostajny na $[-a_n, a_n]$. Jakie warunki musi spełniać ciąg $(a_n)_{n\geq 1}$, by szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \sin X_n$ był zbieżny p.n.?

8. Dany jest ciąg $(p_n)_{n\geq 1}$ liczb z przedziału $(0,1)$ oraz ciąg $(X_n)_{n\geq 1}$ niezależnych zmiennych losowych, przy czym dla $n \geq 1$ zmienna X_n ma rozkład geometryczny z parametrem p_n, tzn. $\mathbb{P}(X_n = k) = (1-p_n)^k p_n$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Jakie warunki musi spełniać ciąg $(p_n)_{n\geq 1}$, by szereg $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ był zbieżny p.n.?

9. W 10000 torebek z cukrem umieszczono w sposób losowy 1000 oznakowanych kryształków cukru. Wyznaczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że w ustalonej torebce będą co najmniej 3 oznakowane kryształki cukru. Oszacować błąd związany z przybliżeniem.

10. Z kuli w $\mathbb{R}^3$ o środku $(0,0,0)$ i promieniu 1 wylosowano niezależnie 2800 punktów. Wyznaczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że co najmniej 315 z nich wpadnie do kuli o środku $(0,1/2,0)$ i promieniu $1/2$. Oszacować błąd związany z przybliżeniem.

11. Gracze A i B grają w orła i reszkę niesymetryczną monetą, dla której prawdopodobieństwo wypadnięcia orła wynosi $1/3$. W przypadku, gdy wypadnie orzeł, gracz A płaci graczowi B 5 złotych; jeśli wypadnie reszka, gracz B płaci graczowi A 2 złote. Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że po 1800 rzutach gracz B zanotuje zysk większy niż 670 złotych. Oszacować błąd związany z przybliżeniem.