Zadania na trzecią kartkówkę

1. Zmienna losowa X ma rozkład geometryczny z parametrem $2/3$ (tzn. $\mathbb{P}(X = k) = 2\cdot 3^{-k}$, $k = 1, 2, \ldots$. Obliczyć $\mathbb{E}e^X$ oraz udowodnić, że dla każdego $0 < p < \infty$, zmienna X ma skończony moment rzędu p.

2. Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na przedziale $(0, 10)$. Obliczyć $\mathbb{E}\sin X$, $\mathrm{Var}\,\sqrt{X}$ oraz $\mathrm{Cov}\,(X, X^2)$.

3. Zmienna losowa X ma scentrowany rozkład normalny (tzn. o średniej 0) o wariancji σ^2. Udowodnić, że dla liczby całkowitej dodatniej n,

$$\mathbb{E}X^n = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } n \text{ jest nieparzyste,} \\ (n-1)!!\sigma^n & \text{jeśli } n \text{ jest parzyste.} \end{cases}$$

Uwaga: $(2n - 1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n - 1)$.

4. Dziesięciu chłopców i dziesięć dziewczynek ustawia się losowo w pary. Wyznaczyć wartość oczekiwaną i wariancję liczby par złożonych z samych dziewczynek.

5. Grupa n osób ($n \geq 2$), wśród których są osoby A i B, ustawia się losowo w kolejce. Wyznaczyć wartość oczekiwaną i wariancję liczby osób stojących między A i B.

6. Rzucamy kostką aż do momentu otrzymania piątki i parzystej liczby oczek (łącznie, niekoniecznie pod rząd). Wyznaczyć wartość oczekiwaną liczby rzutów.

Wskazówka: Niech X oznacza liczbę rzutów. Warto najpierw obliczyć $\mathbb{P}(X \geq k)$ dla $k = 1, 2, \ldots$.

7. Zmienna losowa X jest całkowalna. Udowodnić, że dla $t > 0$,

$$\mathbb{P}(X - |\mathbb{E}X| \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}|X|}{t}.$$

Wskazówka: Zachodzi nierówność $X \leq |X|$.

8. Dana jest zmienna losowa X.

a) Udowodnić, że jeśli $X \in L^2$, to $\lim_{t\to\infty} t\mathbb{P}(|X| \geq t) = 0$.

b) Udowodnić, że jeśli $X \in L^1$, to $\lim_{t\to\infty} t\mathbb{P}(|X| \geq t) = 0$.

Wskazówka do b): Śledząc dowód nierówności Czebyszewa, widzimy, że dla każdego $t > 0$, $t\mathbb{P}(|X| \geq t) \leq \mathbb{E}|X|1_{\{|X|\geq t\}}$.

9. Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład z gęstością

$$g(x, y) = (x + y)1_{\{x,y\in[0,1]\}}.$$

a) Wyznaczyć średnią wektora (X, Y) oraz jego macierz kowariancji.

b) Obliczyć $\mathbb{E}X^2Y$.

c) Obliczyć $\mathrm{Cov}(X + Y, X - Y)$. Czy zmienne $X + Y$, $X - Y$ są niezależne?

10. Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład z gęstością

$$g(x, y) = \frac{\sqrt{5}}{2\pi} \exp\left(-x^2 - xy - \frac{3y^2}{2}\right).$$

a) Wyznaczyć macierz kowariancji zmiennej (X, Y).

b) Wyznaczyć rozkład zmiennej $2X + 5Y - 1$.

c) Wyznaczyć taką liczbę $a \in \mathbb{R}$, by zmienne $X + Y$, $X + aY$ były niezależne.

11. Dany jest ciąg $(X_n)_{n\geq 1}$ niezależnych zmiennych losowych, przy czym dla $n \geq 1$ zmienna X_n ma rozkład zadany przez $\mathbb{P}(X_n = n) = n^{-1} = 1 - \mathbb{P}(X_n = 0)$.

a) Udowodnić, że $(X_n)_{n\geq 1}$ jest zbieżny według prawdopodobieństwa, ale nie jest zbieżny p.n..

b) Czy rodzina $(X_n)_{n\geq 1}$ jest jednostajnie całkowalna?

12. Dany jest ciąg $(X_n)_{n\geq 1}$ niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie zadanym przez $\mathbb{P}(X_n = 0) = \mathbb{P}(X_n = 2) = 1/2$.

a) Udowodnić, że $(X_1 X_2 \ldots X_n)_{n\geq 1}$ jest zbieżny p.n.

b) Udowodnić, że $(X_1 X_2 \ldots X_n)_{n\geq 1}$ nie jest zbieżny w L^1.

c) Czy rodzina $(X_1 X_2 \ldots X_n)_{n\geq 1}$ jest jednostajnie całkowalna?

13. Dany jest ciąg $(X_n)_{n\geq 1}$ niezależnych zmiennych losowych, przy czym dla $n \geq 1$, zmienna X_n ma rozkład jednostajny na odcinku $[0, n]$.

a) Udowodnić, że ciąg X_1, $\min(X_1, X_2)$, $\min(X_1, X_2, X_3)$, $\ldots$ jest zbieżny według prawdopodobieństwa do 0.

b) Udowodnić, że ciąg X_1, $\min(X_1, X_2)$, $\min(X_1, X_2, X_3)$, $\ldots$ zbiega p.n. do 0.

Wskazówka do b): Skorzystać z a) oraz tego, że ciąg minimów jest nierosnący.