

RP 1, zadania na drugą kartkówkę

1. W urnie znajduje się jedna czarna kula. Wykonujemy nieskończony ciąg losowań. W każdym losowaniu ciągniemy kulę z urny, oglądamy ją, wrzucamy z powrotem oraz dorzucamy białą kulę. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że nieskończenie wiele razy wyciągniemy czarną kulę.

2. Zmienna losowa X ma rozkład z gęstością

$$g(x) = \frac{1}{4}x^3 1_{[0,2]}(x).$$

- Wyznaczyć rozkład zmiennej $Y = \max(X, 1)$.
- Wyznaczyć gęstość rozkładu zmiennej $Z = (X - 1)^3$.

3. Zmienne X, Y są niezależne, X ma rozkład jednostajny na odcinku $[0, 2]$, a rozkład Y jest zadany przez równości $\mathbb{P}(Y = -1) = \mathbb{P}(Y = 1) = \frac{1}{2}$. Wyznaczyć rozkład zmiennej $X + Y$.

4. Zmienne losowe X, Y są niezależne, przy czym X ma rozkład Poissona z parametrem 2, a Y ma rozkład geometryczny z parametrem $\frac{1}{3}$ (tzn. mamy $\mathbb{P}(Y = k) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k$ dla $k = 0, 1, 2, \dots$).

- Wyznaczyć rozkład zmiennej $\min\{X, 2\}$.
- Obliczyć $\mathbb{P}(X = Y)$.

5. Zmienne losowe X, Y są niezależne, przy czym X ma rozkład wykładniczy z parametrem 2, a Y ma rozkład jednostajny na $[0, 1]$.

- Wyznaczyć gęstość zmiennej $X + Y$.
- Dowieść, że zmienne e^{-X} oraz \sqrt{Y} mają ten sam rozkład.

6. Zmienna losowa X ma standardowy rozkład normalny. Udowodnić, że $|X|$ oraz $\frac{X}{|X|}$ są niezależne.

7. Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład z gęstością

$$g(x, y) = Cx 1_{\{|y| \leq x \leq 1\}}.$$

- Wyznaczyć C .
- Wyznaczyć rozkład zmiennej Y/X oraz rozkład zmiennej X . Czy zmienne te są niezależne?
- Wyznaczyć rozkład zmiennej $X + Y$.

8. Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład jednostajny na kwadracie o wierzchołkach $(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)$.

- Napisać gęstość zmiennej (X, Y) .
- Obliczyć gęstość zmiennej X .
- Obliczyć $\mathbb{P}(X^2 + Y^2 \leq 1/2)$.
- Udowodnić, że zmienne $X + Y$ oraz $X - Y$ są niezależne.

9. Zmienne losowe X, Y są niezależne, przy czym X ma rozkład $B(10, 1/3)$, a Y ma rozkład $B(15, 1/3)$. Wyznaczyć rozkład zmiennej $X + Y$.

10. Zmienne losowe X_1, X_2, \dots są niezależne i mają rozkład jednostajny na odcinku $[0, 1]$. Definiujemy

$$\tau = \inf\{n : X_1 + X_2 + \dots + X_n \geq 1\}.$$

Wyznaczyć rozkład zmiennej τ .