Praca domowa nr 1. Termin oddawania prac: 28 listopada 2021

1. Dany jest łańcuch Markowa $(X_n)_{n\geq 0}$ na przestrzeni stanów $E = \{1, 2, 3\}$ o macierzy przejścia

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix},$$

spełniający warunek $\mathbb{P}(X_0 = 1) = 1$. Rozwiązać problem optymalnego stopowania

$$V = \sup_{\tau\leq 3} \mathbb{E}X_\tau.$$

2. Wykładowca podał listę N pytań na egzamin ustny, do którego przystępuje m osób ($m \leq N$). Studenci kolejno wchodzą na egzamin, każdy z nich otrzymuje po jednym pytaniu, które po wykorzystaniu jest skreślane przez wykładowcę (i nie jest już zadawane kolejnym osobom).

Ustalony student przygotował się do odpowiedzi na k pytań i zastanawia się nad optymalną strategią: w każdej chwili, na podstawie pytań zadanych do tej pory przez wykładowcę, decyduje czy wejść/nie wejść na egzamin. Niech G_n oznacza prawdopodobieństwo zdania egzaminu, przy założeniu, że student wejdzie na egzamin jako n-ta osoba. Rozwiązać problem $V = \sup \mathbb{E}G_\tau$, gdzie supremum jest wzięte po wszystkich momentach zatrzymania (względem odpowiedniej naturalnej filtracji).

3. Z urny zawierającej N kul ponumerowanych liczbami od 1 do N losujemy kolejno po jednej kuli ze zwracaniem. Koszt pojedynczego losowania jest równy zadanemu parametrowi $c > 0$. Niech X_n oznacza liczbę różnych kul zaobserwowanych w pierwszych n losowaniach, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Rozwiązać problem

$$V = \sup_\tau \mathbb{E}(X_\tau - c\tau),$$

gdzie supremum jest wzięte po wszystkich całkowalnych momentach zatrzymania.

4. Niech $(S_n)_{n\geq 0}$ będzie symetrycznym błądzeniem losowym po liczbach całkowitych i niech $\beta \in (0, 1)$ będzie ustalonym parametrem. Rozwiązać problem

$$V(x) = \sup_\tau \mathbb{E}_x\big[\beta^\tau (1 - \exp(S_\tau))^+\big], \qquad x \in \mathbb{Z},$$

gdzie supremum jest wzięte po wszystkich skończonych momentach zatrzymania τ.

5. Załóżmy, że n jest ustaloną liczbą całkowitą dodatnią. Wykazać, że dla dowolnych zmiennych $X_1, X_2, \ldots, X_n$ o wartościach w $[0, 1]$ zachodzi nierówność

$$\mathbb{E} \max_{1\leq k\leq n} X_k \leq \sup_\tau \mathbb{E}X_\tau + \left(\frac{n-1}{n}\right)^n,$$

gdzie supremum po prawej stronie jest wzięte po wszystkich momentach zatrzymania τ względem naturalnej filtracji generowanej przez ciąg $X_1, X_2, \ldots, X_n$.