Egzamin z Metodyki Nauczania Rachunku Prawdopodobieństwa,
12 czerwca 2014 r.

Czas trwania: 150 minut.

1. (8p.) Do kasyna wchodzi średnio jedna osoba na każde 2 minuty. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że między $12:00$ a $12:04$ do kasyna wejdą co najmniej trzy osoby.

2. (8p.) Po polach szachownicy 3×3 porusza się król szachowy, w każdym ruchu przesuwając się na pole graniczące bokiem lub rogiem z tym, na którym aktualnie się znajduje (każde z dostępnych pól ma tę samą szansę na wybranie, wybory pól w poszczególnych ruchach są niezależne). W chwili początkowej król znajduje się w lewym dolnym rogu. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że król odwiedzi prawe górne pole wcześniej niż pole centralne.

3. (8p.) W pewnej grze startuje n graczy, i każdy z nich, niezależnie od pozostałych, zostanie zwycięzcą z prawdopodobieństwem p. Nagrodą jest 1 mln zł; w przypadku kilku zwycięzców, kwota ta jest dzielona równo pomiędzy nich. Niech X oznacza kwotę wygranej (w mln zł) pewnego z góry ustalonego gracza. Wyznaczyć rozkład zmiennej X oraz jej wartość oczekiwaną.

4. (8p.) Z urny, zawierającej m białych i n czarnych kul, losujemy kolejno po jednej kuli bez zwracania aż do momentu opróżnienia urny. Niech X oznacza liczbę tych białych kul, których wyciągnięcie było bezpośrednio poprzedzone wyciągnięciem kuli czarnej. Obliczyć wartość oczekiwaną oraz wariancję X.

5. (8p.) Załóżmy, że A_1, A_2, ..., A_n są pewnymi ustalonymi zdarzeniami. Dla $k = 1, 2, \ldots, n$, niech $B_k = \{$zajdzie co najmniej k spośród zdarzeń $A_1, A_2, \ldots, A_n\}$. Wykazać, że

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k).$$

6. (10p.) Dysponujemy kostką, dla której prawdopodobieństwo uzyskania k oczek wynosi p_k, $k = 1, 2, \ldots, 6$ $(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1)$. Rzucamy tą kostką do momentu uzyskania wszystkich możliwych liczb oczek. Obliczyć wartość oczekiwaną liczby rzutów.