Metodyka nauczania Rachunku Prawdopodobieństwa
- zadania na czwartą kartkówkę.

1. W miastach A i B wyróżniono po jednym, najbardziej niebezpiecznym skrzyżowaniu. Ze statystycznych danych wynika, iż średnio na skrzyżowaniu w mieście A są dwa wypadki miesięcznie, natomiast w mieście B - cztery wypadki miesięcznie. Zakładając, że miasta A, B są na różnych kontynentach, wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że w danym miesiącu łączna liczba wypadków na obu skrzyżowaniach będzie niemniejsza niż 2.

2. Pierwszy gracz rzuca trzema, a drugi dwiema jednakowymi monetami o nominale 1zł. Wygrywa i dostaje wszystkie pięć monet ten z graczy, który wyrzuci więcej orłów. W przypadku, gdy liczby wyrzuconych orłów są równe, gra jest kontynuowana. Obliczyć wartość oczekiwaną wygranej każdego z graczy.

3. Niech k będzie ustaloną liczbą całkowitą dodatnią. Rzucamy prawidłową monetą aż do momentu gdy wypadnie (łącznie, niekoniecznie pod rząd) co najmniej k orłów i co najmniej k reszek. Niech X oznacza liczbę rzutów. Znaleźć rozkład zmiennej X oraz obliczyć $\mathbb{E}X$.

4. Z urny zawierającej n kul ponumerowanych liczbami od 1 do n losujemy k razy po jednej kuli ze zwracaniem. Niech X, Y oznaczają odpowiednio najmniejszy oraz największy z wyciągniętych numerów. Wykazać, że $\mathbb{E}X + \mathbb{E}Y = n + 1$.

5. W urnie znajduje się pięć kul białych, trzy czarne i dwie czerwone. Losujemy po jednej kuli ze zwracaniem aż do momentu wyciągnięcia kuli czerwonej. Obliczyć wartość oczekiwaną wyciągniętych białych kul.

6. Rzucamy prawidłową kostką aż do momentu uzyskania piątki oraz parzystej liczby oczek. Obliczyć wartość oczekiwaną i wariancję liczby rzutów.

7. W urnie znajduje się 50 białych kul. Losujemy ze zwracaniem po jednej kuli, przy czym wyciągniętą kulę malujemy na czerwono, jeśli jest biała. Niech X oznacza liczbę czerwonych kul w urnie po 20 losowaniach. Wyznaczyć $\mathbb{E}X$ oraz $\operatorname{Var} X$.

8. Losujemy (w sposób niezależny) dwa niepuste, otwarte przedziały I, J o końcach w zbiorze $\{1, 2, \ldots, n\}$. Obliczyć wartość oczekiwaną długości ich części wspólnej.

Uwaga: Być może przydadzą się tożsamości

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2,$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}.$$