

**Metodyka nauczania Rachunku Prawdopodobieństwa**  
**- zadania na trzecią kartkówkę.**

1. Z talii 52 kart losujemy 5 kart bez zwracania. Wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że otrzymaliśmy co najmniej cztery figury, jeśli wiadomo, że mamy asa i nie mamy żadnych kierów (przyjmujemy, że as jest figurą).

2. W urnie znajduje się jedna prawidłowa kostka oraz jedna fałszywa, z dwoma szóstkami i czterema trójkami. Losujemy kostkę, wykonujemy nią rzut, a następnie rzut powtarzamy, jeśli wypadła szóstka lub trójka.

Po wykonaniu powyższego doświadczenia okazało się, że w dokładnie jednym rzucie wypadła szóstka. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że kostka jest prawidłowa?

3. Z urny, zawierającej  $n$  kul ponumerowanych liczbami od 1 do  $n$ , losujemy kolejno ze zwracaniem po jednej kuli i zapisujemy na kartce numer kuli, jeśli nie pojawił się on we wcześniejszych losowaniach. Doświadczenie kontynuujemy aż do momentu, gdy zobaczymy wszystkie możliwe numery kul. Z badać niezależność zdarzeń  $A_j = \{j\text{-ty oraz } j+1\text{-szy numer na kartce pojawiły się w wyniku wykonania dwóch kolejnych rzutów}\}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n - 1$ .

4. W urnie  $I$  znajdują się trzy białe kule i dwie czarne; w urnie  $II$  znajdują się dwie białe kule i trzy czarne. Losujemy kulę z urny  $I$  i albo wrzucamy ją z powrotem, albo przekładamy do urny  $II$  (każda z tych dwóch możliwości ma prawdopodobieństwo  $1/2$ ). Następnie, analogiczną czynność wykonujemy dla urny  $II$ . Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że pierwsza z wylosowanych kul była biała, jeśli wiadomo, że po dwóch losowaniach urna  $II$  zawiera dokładnie dwie białe kule?

5. Do  $n$ -osobowego samolotu wsiada  $n$  podróżnych  $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_n$ , zajmując kolejno miejsca, osoba po osobie. Pasażer  $\mathcal{P}_1$  ignoruje informację na swoim bilecie i siada na losowo wybranym miejscu. Każda z następnych osób siada na miejscu zgodnie ze swoim biletem, jeśli jest wolne; w przeciwnym razie, wybiera losowo jedno z pozostałych miejsc. Wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że pasażer  $\mathcal{P}_n$  usiądzie na miejscu opisanym na swoim bilecie.

6. W turnieju szachowym uczestniczy  $2^n$  graczy, wśród których są zawodnicy  $X$  oraz  $Y$ . W pierwszej rundzie, gracze są parowani w sposób losowy; następnie,  $2^{n-1}$  zwycięzców ponownie grupuje się w pary losowo, itd., aż do  $n$ -tej rundy, w której dwóch pozostałych zawodników rozgrywa partię o zwycięstwo w turnieju. Zakładamy, że nie ma remisów oraz że gracze grają na tym samym poziomie (w każdej partii, prawdopodobieństwo zwycięstwa dla każdego gracza wynosi  $1/2$ ). Wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że zawodnicy  $X$  oraz  $Y$  rozegrają partię przeciwko sobie.

7. Trzech graczy  $X, Y, Z$  rzuca kostką do gry, w kolejności  $XYZXYZ \dots$ . Wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że pierwszą szóstkę wyrzuci  $X$ , drugą szóstkę wyrzuci  $Y$  oraz trzecią szóstkę wyrzuci  $Z$ .

8. W urnie znajduje się 1 biała i 1 czarna kula. Wykonujemy ciąg  $n$  losowań zgodnie z następującym schematem: losujemy kulę, oglądamy ją, a następnie zwracamy ją do urny i dokładamy jeszcze jedną kulę tego samego koloru. Dla  $j \in \{1, 2, \dots, n+1\}$ , niech  $p_j$  oznacza prawdopodobieństwo tego, że po  $n$  losowaniach urna zawiera dokładnie  $j$  kul białych. Udowodnić, że  $p_j = 1/(n+1)$  dla wszystkich  $j$ .