METODYKA NAUCZANIA
RACHUNKU PRAWDOPODOBIEŃSTWA

ADAM OSĘKOWSKI

1. Wybrane elementy kombinatoryki

Celem niniejszego rozdziału jest przedstawienie kilku standardowych pojęć i metod pojawiających się w rozumowaniach kombinatorycznych. We wszystkich poniższych rozważaniach badane zbiory są skończone, a ich moc jest oznaczana symbolem $|\cdot|$.

1.1. **Reguły dodawania i mnożenia.** Zacznijmy od trywialnego spostrzeżenia.

Twierdzenie 1.1 (O dodawaniu)**.** *Załóżmy, że A_1, A_2, …, A_n są parami rozłącznymi zbiorami. Wówczas $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|$.*

Wzór ten, choć oczywisty, jest bardzo przydatny: w wielu zadaniach, podczas wyznaczania mocy zadanego zbioru B, można rozbić go na parami rozłączne podzbiory B_1, B_2, …, B_n i obliczać osobno moc każdego z nich. Warto tu także wspomnieć o wzorze na moc „zbioru dopełniającego". Ściślej, załóżmy, że A jest zadanym zbiorem o znanej mocy, i przypuśćmy, że naszym celem jest wyznaczenie mocy pewnego podzbioru $B \subseteq A$. Wówczas, na mocy powyższego twierdzenia, zachodzi równość

$$|B| = |A| - |A \setminus B|.$$

Jest to przydatna tożsamość: w wielu sytuacjach moc $|A \setminus B|$ jest łatwa, albo przynajmniej łatwiejsza, do wyznaczenia (por. przykłady poniżej).

W przypadku gdy zbiory A_1, A_2, …, A_n nie są parami rozłączne, moc ich sumy wyznaczamy na mocy poniższego wzoru, tzw. zasady włączeń i wyłączeń.

Twierdzenie 1.2. *Dla dowolnych zbiorów A_1, A_2, …, A_n zachodzi równość*

$$\left|\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |A_k| - \sum_{k<\ell} |A_k \cap A_\ell| + \sum_{k<\ell<m} |A_k \cap A_\ell \cap A_m| - \ldots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|.$$

Dowód. Dla $n = 1$ wzór jest oczywisty. Jeśli $n = 2$, zbiór $A_1 \cup A_2$ jest sumą parami rozłącznych podzbiorów $A_1 \setminus A_2$, $A_1 \cap A_2$ oraz $A_2 \setminus A_1$. Ponadto, $A_1 = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_1 \cap A_2)$ oraz $A_2 = (A_2 \setminus A_1) \cup (A_1 \cap A_2)$, i wskazane składniki także są parami rozłączne. Stąd, na mocy twierdzenia o dodawaniu,

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1 \setminus A_2| + |A_1 \cap A_2| + |A_2 \setminus A_1| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|,$$

co było do okazania. W przypadku $n \geq 3$, wykorzystujemy indukcję: stosując wzór włączeń i wyłączeń do zbiorów $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2$, …, $B_{n-2} = A_{n-2}$,

$B_{n-1} = A_{n-1} \cup A_n$, dostajemy

$$\left|\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right| = \left|\bigcup_{k=1}^{n-1} B_k\right| = \sum_{k=1}^{n-1} |B_k| - \sum_{k<\ell} |B_k \cap B_\ell| + \sum_{k<\ell<m} |B_k \cap B_\ell \cap B_m| - \ldots$$
$$+ (-1)^n |B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_{n-1}|.$$

Zauważmy, że $|B_{k_1} \cap B_{k_2} \cap \ldots \cap B_{k_m}| = |A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \ldots \cap A_{k_m}|$ jeśli $k_1 < k_2 < \ldots < k_m < n-1$; jeśli zaś $k_m = n-1$, to stosując udowodniony wyżej przypadek $n = 2$ do zbiorów $A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \ldots \cap A_{k_{m-1}} \cap A_{n-1}$ oraz $A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \ldots \cap A_{k_{m-1}} \cap A_n$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} |B_{k_1} \cap B_{k_2} \cap \ldots \cap B_{k_m}| &= |A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap A_{k_{m-1}} \cap (A_{n-1} \cup A_n)| \\ &= |A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \ldots \cap A_{k_{m-1}} \cap A_{n-1}| \\ &\quad + |A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \ldots \cap A_{k_{m-1}} \cap A_n| \\ &\quad - |A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \ldots \cap A_{k_{m-1}} \cap A_{n-1} \cap A_n|. \end{aligned}$$

Po odpowiednim przestawieniu składników po prawej stronie, otrzymujemy tezę. □

Najprostszym narzędziem służącym do zliczania mocy konkretnego zbioru jest wypisanie wszystkich elementów tego zbioru. Rozważmy następujące zadanie.

Przykład 1.1. Rzucono sześć razy monetą i wynik zapisano w postaci ciągu sześcioelementowego o wyrazach O lub R. Ile jest takich wyników, że reszka wypadła dokładnie raz lub dokładnie dwa razy?

Rozwiązanie. Oznaczmy zbiór rozważanych wyników przez A. Zachodzi równość $A = A_1 \cup A_2$, gdzie A_i to zbiór tych ciągów, w których wyraz R pojawia się dokładnie i razy, $i = 1, 2$. Wówczas

$$A_1 = \{(R,O,O,O,O,O), (O,R,O,O,O,O), \ldots, (O,O,O,O,O,R)\}$$

oraz

$$\begin{aligned} A_2 = \{(R,R,O,O,O,O),&(R,O,R,O,O,O), \ldots, (R,O,O,O,O,R), \\ &(O,R,R,O,O,O), \ldots, (O,R,O,O,O,R), \\ &\qquad \ldots \\ &\qquad (O,O,O,O,R,R)\}, \end{aligned}$$

skąd $|A_1| = 6$ oraz $|A_2| = 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$. Wobec tego $|A| = 21$. □

Przejdźmy teraz do kolejnego twierdzenia, również niezwykle elementarnego i oczywistego.

Twierdzenie 1.3 (O mnożeniu)**.** *Wybieramy ciąg $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o $n \geq 1$ elementach. Przypuśćmy, że wyraz x_1 może być wybrany na k_1 sposobów; dla dowolnego ustalonego wyboru x_1, wyraz x_2 może być wybrany na k_2 sposobów; itd., dla dowolnego ustalonego wyboru x_1, x_2, $\ldots$, x_{n-1}, wyraz x_n może być wybrany na k_n sposobów. Wówczas ciąg $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ może być wybrany na $k_1 k_2 \ldots k_n$ sposobów.*

Zilustrujemy powyższy fakt na następującym przykładzie.

Przykład 1.2. Na ile sposobów można wybrać ciąg czterocyfrowy, jeśli

(a) nie ma ograniczeń?

(b) żadna cyfra nie może się powtarzać?
(c) w ciągu musi pojawić się co najmniej jedna cyfra parzysta?
(d) czwarta cyfra nie może być piątką oraz nie może być trzech zer pod rząd?

Rozwiązanie. (a) Stosujemy twierdzenie o mnożeniu: każda cyfra może być wybrana na 10 sposobów, a więc badana liczba ciągów wynosi $10^4 = 10000$.

(b) Ponownie stosujemy twierdzenie o mnożeniu. Pierwszą cyfrę wybieramy na 10 sposobów; drugą cyfrę możemy wybrać na 9 sposobów, gdyż cyfra wybrana na pierwszym miejscu nie wchodzi już w grę. Analogicznie, pozostałe dwie cyfry wybieramy na 8 oraz 7 sposobów, odpowiednio. Stąd szukana liczba sposobów wynosi $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$.

(c) Oznaczmy zbiór wszystkich ciągów czterocyfrowych przez A oraz badaną w niniejszym podpunkcie klasę ciągów przez C. Wówczas $|C| = |A| - |A \setminus C|$ oraz $A \setminus C$ to zbiór ciągów czteroelementowych o wyrazach nieparzystych. Moc tego ostatniego zbioru łatwo wyznaczyć: $|A \setminus C| = 5^4 = 625$, a stąd $|C| = 10000 - 625 = 9375$.

(d) Oznaczmy klasę badanych ciągów przez D. Ponownie, łatwiej będzie nam wyznaczyć moc ,,zbioru dopełniającego” $A \setminus D$. Zbiór ten jest sumą dwóch zbiorów: $D_1 = \{$ciągi zawierające 5 na ostatniej pozycji$\}$ i $D_2 = \{$ciągi zawierające podciąg kolejnych trzech zer$\}$. Wobec tego, na mocy wzoru włączeń i wyłączeń,

$$|A \setminus D| = |D_1| + |D_2| - |D_1 \cap D_2|.$$

Korzystając z twierdzenia o mnożeniu, $|D_1| = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 1 = 1000$. Ponadto, łatwo wypisać wszystkie elementy D_2: są to $(0, 0, 0, 0)$ oraz ciągi postaci $(0, 0, 0, c)$ albo $(c, 0, 0, 0)$, gdzie $c \in \{1, 2, \ldots, 9\}$; stąd $|D_2| = 19$. Wreszcie, mamy $D_1 \cap D_2 = \{(0, 0, 0, 5)\}$, a więc $|D_1 \cap D_2| = 1$. W konsekwencji, dostajemy odpowiedź:

$$|D| = |A| - |A \setminus D| = 10000 - (1000 + 19 - 1) = 8982. \quad \square$$

1.2. **Podstawowe schematy kombinatoryczne.**

Definicja 1.1. Przypuśćmy, że k jest ustaloną liczbą całkowitą dodatnią. Każdy ciąg $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ o wyrazach ze zbioru A nazywamy *k-elementową wariacją zbioru A* lub *k-elementową wariacją z powtórzeniami zbioru A*.

Jeśli zbiór A ma n elementów, to liczba wszystkich takich wariacji wynosi n^k, co wynika wprost z twierdzenia o mnożeniu.

Definicja 1.2. Załóżmy, że k jest ustaloną liczbą całkowitą dodatnią. Każdy różnowartościowy ciąg $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ o wyrazach ze zbioru A nazywamy *k-elementową wariacją bez powtórzeń zbioru A*. W szczególności, jeśli $k = n$, to takie wariacje nazywamy *permutacjami zbioru A*.

Jeśli zbiór A ma n elementów oraz $1 \leq k \leq n$, to liczba wszystkich takich wariacji wynosi $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = n!/(n-k)!$, co wynika wprost z twierdzenia o mnożeniu. Liczba permutacji zbioru n-elementowego wynosi $n!$.

Definicja 1.3. Załóżmy, że k jest ustaloną liczbą całkowitą dodatnią. Każdy k-elementowy podzbiór zbioru A nazywamy *k-elementową kombinacją zbioru A*.

Jeśli zbiór A ma n elementów, to liczba wszystkich takich kombinacji wynosi

$$C(n; k) = \binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{jeśli } 0 \leq k \leq n, \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Przykład 1.3. Wokół okrągłego stołu siada n małżeństw. Ile jest takich usadzeń, w którym każde małżeństwo zajmuje dwa sąsiednie krzesła? Dwa usadzenia są tożsame, jeśli jedno powstaje z drugiego poprzez przesadzenie wszystkich osób o tę samą liczbę krzeseł w kierunku wskazówek zegara.

Rozwiązanie. Dla $n = 1$, jest jedno usadzenie. Dla $n \geq 2$, rozumujemy następująco. Najpierw ustalamy, w obrębie każdego małżeństwa, kolejność usadzenia małżonków A i B; są dwie możliwości: AB i BA, a więc wszystkich wyborów takich kolejności (dla wszystkich małżeństw) jest 2^n. Następnie, wybieramy dowolną permutację σ zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ i usadzamy wszystkie osoby począwszy od ustalonego krzesła, zgodnie z regułą

$$\text{małżeństwo nr } \sigma_1, \text{ małżeństwo nr } \sigma_2, \ \ldots, \text{ małżeństwo nr } \sigma_n, \tag{1.1}$$

gdzie kolejność w obrębie każdego małżeństwa została wyznaczona powyżej. Powyższą operację można wykonać na $2^n \cdot n!$ sposobów. Pozostaje już tylko zauważyć, że każde usadzenie, o którym mowa w zadaniu, zostało policzone n razy: istotnie, dowolne cykliczne przesunięcie ciągu (1.1) o parzystą liczbę miejsc w prawo prowadzi do tego samego usadzenia. Stąd odpowiedź $2^n \cdot (n-1)!$. □

Przykład 1.4. Wyznaczyć liczbę n-elementowych ciągów zero-jedynkowych, zawierających dokładnie m podciągów 01.

Rozwiązanie, Sposób I. Spójrzmy na graficzny zapis ciągu $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$: zawiera on $n-1$ przecinków. Ustalony przecinek nazwiemy *przejściem* jeśli liczby stojące za nim oraz przed nim są różne (innymi słowy, jeśli rozgranicza on 0 i 1, bądź 1 i 0). Zwróćmy uwagę, iż podanie pierwszego elementu ciągu oraz wskazanie przejść w jednoznaczny sposób zadaje cały ciąg zero-jedynkowy.

Ustalmy teraz ciąg o jakim mowa w zadaniu: zachodzą teraz cztery możliwości:

· Ciąg zaczyna się jedynką i kończy się zerem. Wówczas w ciągu musi być $2m+1$ przejść; liczba takich ciągów wynosi $\binom{n-1}{2m+1}$.

· Ciąg zaczyna i kończy się jedynką. Wówczas w ciągu musi być $2m$ przejść; liczba takich ciągów wynosi $\binom{n-1}{2m}$.

· Ciąg zaczyna się zerem i kończy się jedynką. Wówczas w ciągu musi być $2m-1$ przejść; liczba takich ciągów wynosi $\binom{n-1}{2m-1}$.

· Ciąg zaczyna i kończy się zerem. Wówczas w ciągu musi być $2m$ przejść; liczba takich ciągów wynosi $\binom{n-1}{2m}$.

Powyższe przypadki są parami rozłączne i wyczerpują wszystkie możliwości. Stąd szukana w zadaniu liczba ciągów wynosi

$$\binom{n-1}{2m+1} + \binom{n-1}{2m} + \binom{n-1}{2m-1} + \binom{n-1}{2m} = \binom{n}{2m+1} + \binom{n}{2m} = \binom{n+1}{2m+1},$$

gdzie skorzystaliśmy z tzw. wzoru Pascala

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1},$$

prawdziwego dla wszystkich liczb całkowitych nieujemnych n, k. □

Rozwiązanie, Sposób II. Otrzymany wyżej wynik sugeruje, iż możliwe jest krótsze rozumowanie, sprowadzające każdy z wyróżnionych podzbiorów do pewnej $2m+1$-elementowej kombinacji pewnego zbioru $n+1$-elementowego. Istotnie, takie rozwiązanie istnieje. Załóżmy, że $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ jest ciągiem o zadanych własnościach, i dopiszmy jedynkę na początku, zero na końcu. Ta operacja zadaje bijekcję

$$\begin{array}{c}\text{ciągi długości } n\\ \text{zawierające } m \text{ bloków } 01\end{array} \quad \leftrightarrow \quad \begin{array}{c}\text{ciągi długości } n+2,\\ \text{zawierające } m \text{ bloków } 01,\\ \text{zaczynające się jedynką, kończące zerem.}\end{array}$$

Z drugiej zaś strony, jak wynika z rozumowania prezentowanego w Sposobie I, liczba tych ostatnich ciągów wynosi $\binom{n+1}{2m+1}$, □

Przykład 1.5. Wyznaczyć liczbę podzbiorów A zbioru $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ o tej własności, że jeśli a, $b \in A$, to $a + b \neq 2n + 1$.

Rozwiązanie, Sposób I. Dzielimy elementy zbioru $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ na n par: $\{1, 2n\}$, $\{2, 2n-1\}$, …, $\{n, n+1\}$. Ustalmy $0 \leq k \leq n$ i policzmy, ile jest podzbiorów A mocy k o powyższej własności. Z każdego pary możemy wybrać co najwyżej jeden element, stąd badana liczba pozdbiorów wynosi $\binom{n}{k}2^k$. Istotnie, wybieramy k par w których będziemy wybierać element, a następnie, w obrębie każdej pary, mamy dwie możliwości: wybrać mniejszy lub większy element. Powyższy wzór pozostaje w mocy także dla $k = 0$; stąd badana w zadaniu liczba podzbiorów wynosi

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = 3^n,$$

gdzie ostatnia równość wynika wprost z dwumianu Newtona. □

Rozwiązanie, Sposób II. Jak poprzednio, podzielmy elementy zbioru $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ na n par: $\{1, 2n\}$, $\{2, 2n-1\}$, …, $\{n, n+1\}$. Przy określaniu zbioru A o żądanych własnościach, dla każdej pary mamy trzy możliwości: albo wziąć mniejszy element, albo większy element, albo żadnego. Ponieważ liczba par wynosi n, szukana liczba zbiorów wynosi 3^n. □

Przechodzimy do opisu kolejnych schematów kombinatorycznych.

Definicja 1.4. Załóżmy, że k jest ustaloną liczbą całkowitą dodatnią. Każdy k-elementowy multizbiór o elementach należących do A nazywamy *k-elementową kombinacją z powtórzeniami zbioru A.*

Jeśli zbiór A ma n elementów, to liczba jego k-elementowych kombinacji z powtórzeniami wynosi $\binom{n+k-1}{k}$. Aby to wykazać, zauważmy, iż możemy przyjąć, że $A = \{1, 2, \ldots, n\}$. Wypiszmy elementy danej kombinacji w niemalejącym porządku:

$$1 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots \leq a_k \leq n, \tag{1.2}$$

bądź równoważnie $1 \leq a_1 < a_2 + 1 < a_3 + 2 < \ldots < a_k + k - 1 \leq n + k - 1$. Innymi słowy, jeśli oznaczymy $b_\ell = a_\ell + \ell - 1$, $\ell = 1, 2, \ldots, k$, to istnieje bijekcja między zbiorem ciągów $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ spełniających (1.2) (a więc zbiorem k-elementowych kombinacji z powtórzeniami), a zbiorem ciągów $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ spełniających

$$1 \leq b_1 < b_2 < \ldots < b_k \leq n + k - 1.$$

Z drugiej strony, każdy taki ciąg $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ może być utożsamiony z podzbiorem $\{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$ zbioru $\{1, 2, \ldots, n+k-1\}$. Stąd liczba k-elementowych kombinacji zbioru n-elementowego wynosi $\binom{n+k-1}{k}$.

Przykład 1.6. Wyznaczyć liczbę rozwiązań równania $x_1 + x_2 + \ldots + x_9 = 20$ w liczbach całkowitych nieujemnych x_1, x_2, …, x_9.

Rozwiązanie. Każde rozwiązanie możemy w sposób wzajemnie jednoznaczny utożsamić z 20-elementową kombinacją z powtórzeniami zbioru $\{1, 2, \ldots, 9\}$: liczby x_1, x_2, ..., x_9 kodują, ile razy w kombinacji pojawią się elementy 1, 2, ..., 9, odpowiednio. Przykładowo, rozwiązanie

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 0 + 0 + 1 = 20$$

odpowiada kombinacji

$$\{1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 9\}.$$

Wobec tego, szukana liczba rozwiązań wynosi $\binom{20+9-1}{20} = \binom{28}{20}$. □

Definicja 1.5. Załóżmy, że A jest zbiorem n-elementowym, a n_1, n_2, ..., n_k są nieujemnymi liczbami całkowitymi spełniającymi warunek $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$. Wówczas każdy wybór podzbiorów $A_1, A_2, \ldots, A_k$ spełniających warunek $|A_\ell| = n_\ell$, $1 \leq \ell \leq k$, nazywamy *rozbiciem* albo *permutacją z powtórzeniami.*

Liczba rozbić spełniających powyższe założenia wynosi

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \, \ldots \, n_k!}.$$

Wynika to natychmiast z twierdzenia o mnożeniu: mając dany zbiór A, wybieramy podzbiór A_1 na $\binom{n}{n_1}$ sposobów. Następnie, wybieramy podzbiór A_2 zbioru $A \setminus A_1$: można to wykonać na $\binom{n-n_1}{n_2}$ sposobów. Następnie wybieramy podzbiór A_3 zbioru $A \setminus (A_1 \cup A_2)$, itd.; otrzymujemy odpowiedź, że liczba rozbić wynosi

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{n-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1}}{n_k} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \, \ldots \, n_k!},$$

jak łatwo sprawdzić, bezpośrednio rozpisując symbole Newtona.

Kolejny przykład ilustruje dlaczego powyższy schemat określa się mianem „permutacji z powtórzeniami".

Przykład 1.7. Ile różnych 10-elementowych wyrazów można ułożyć z liter A, A, B, B, B, C, C, C, C, C?

Rozwiązanie. Napisanie słowa polega na umieszczeniu kolejnych liter na 10 miejscach. Możemy więc je utożsamić z rozbiciem zbioru miejsc na podzbiory o mocach 2, 3 oraz 5 (które odpowiadają pozycjom, na których stoi litera A, B lub C, odpowiednio). Przykładowo,

$$\text{CCABCABBCC} \leftrightarrow \{3, 6\}, \{4, 7, 8\}, \{1, 2, 5, 9, 10\}.$$

Zatem szukana liczba słów wynosi $\frac{10!}{2!3!5!} = 2520$. □

Przykład 1.8. Wyznaczyć liczbę sposobów umieszczenia m kul w n rozróżnialnych pudełkach.

(a) $m = 8$, $n = 4$, kule są rozróżnialne.

(b) $m = 4$, $n = 8$, kule są rozróżnialne, w każdym pudełku mieści się jedna kula.

(c) $m = 8$, $n = 4$, kule są rozróżnialne, przy czym trzy kule muszą znaleźć się w pierwszym pudełku, po dwie kule muszą znaleźć się w pudełkach nr 2 i 3, oraz jedna kula musi znaleźć się w pudełku nr 4.

(d) $m = 5$, $n = 3$, kule są rozróżnialne, do każdego pudełka musi trafić co najmniej jedna kula.

(e) $m = 8$, $n = 4$, kule są nierozróżnialne.

(f) $m = 8$, $n = 4$, kule są nierozróżnialne, w każdym pudełku należy umieścić co najmniej jedną kulę.

(g) $m = 4$, $n = 8$, kule są nierozróżnialne, w każdym pudełku mieści się jedna kula.

Rozwiązanie. (a) Każdej kuli przypisujemy numer pudełka, do którego trafia, otrzymując w ten sposób 8-elementowy ciąg o wyrazach ze zbioru 4-elementowego. Stąd szukana liczba to $4^8 = 65536$.

(b) Rozumujemy jak poprzednio, lecz tym razem rozważane ciągi muszą być różnowartościowe. Prowadzi to do 4-elementowych wariacji bez powtórzeń zbioru 8-elementowego, stąd odpowiedź $8!/4! = 1680$.

(c) Każde rozmieszczenie zadaje rozbicie zbioru kul na cztery podzbiory A_1, A_2, A_3 oraz A_4, o mocach 3, 2, 2 oraz 1, odpowiednio. Stąd liczba rozmieszczeń wynosi $\binom{8}{3,3,2,1} = 1680$.

(d) Każde rozmieszczenie zadaje rozbicie zbioru kul na trzy podzbiory o dodatniej liczbie elementów. Są następujące możliwości mocy tych podzbiorów: $3, 1, 1$; $2, 2, 1$; $2, 1, 2$; $1, 3, 1$; $1, 2, 2$; $1, 1, 3$. Stąd, szukana liczba rozmieszczeń wynosi

$$\binom{5}{3,1,1} + \binom{5}{2,2,1} + \binom{5}{2,1,2} + \binom{5}{1,3,1} + \binom{5}{1,2,2} + \binom{5}{1,1,3} = 150.$$

(e) Liczba rozmieszczeń jest równa liczbie rozwiązań równania $x_1+x_2+x_3+x_4 = 8$ w liczbach całkowitych nieujemnych. Stąd odpowiedź $\binom{8+4-1}{4-1} = \binom{11}{3} = 165$.

(f) Rozumowanie jest analogiczne do powyższego, tyle, że poszukujemy liczby rozwiązań równania $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$ w liczbach całkowitych dodatnich. Równoważnie, po podstawieniu $y_\ell = x_\ell - 1$, $1 \le \ell \le 4$, musimy wyznaczyć liczbę rozwiązań równania $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 4$ w liczbach całkowitych nieujemnych, a ta wynosi $\binom{4+4-1}{4-1} = \binom{7}{3} = 35$.

(g) Problem sprowadza się do wybrania czterech pudełek do których trafią kule: stąd wynik to $\binom{8}{4} = 70$. □

1.3. **Kilka wybranych metod.** Omówimy teraz pokrótce kilka technik które bywają pomocne w zadaniach kombinatorycznych. Każdą z metod omówimy na wybranych przykładach.

Indukcja. Pierwszą z technik jest zasada indukcji matematycznej.

Przykład 1.9. Udowodnić, że n prostych leżących na płaszczyźnie, z których każde dwie przecinają się, ale żadne trzy nie przechodzą przez jeden punkt, dzieli płaszczyznę na $\frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$ części.

Rozwiązanie. Jedna prosta rozcina płaszczyznę na dwie części, a więc teza zachodzi w przypadku $n = 1$. Załóżmy, że teza zachodzi dla pewnej liczby całkowitej n i ustalmy proste ℓ_1, ℓ_2, …, ℓ_{n+1} spełniające powyższe warunki. Wówczas pierwsze n prostych rozcina płaszczyznę na $\frac{1}{2}(n^2+n+2)$ obszarów. Niech A_1, A_2, …, A_n będą punktami przecięcia prostej ℓ_{n+1} z prostymi ℓ_1, ℓ_2, …, ℓ_n, odpowiednio. Punkty te rozcinają prostą ℓ_{n+1} na $n + 1$ części, i każdy z tych kawałków dzieli jeden z obszarów na dwie części. Stąd liczba części odpowiadających $n+1$ prostym wynosi

$$\frac{1}{2}(n^2 + n + 2) + n + 1 = \frac{1}{2}((n + 1)^2 + (n + 1) + 2),$$

a więc na mocy zasady indukcji, teza zadania jest prawdziwa dla wszystkich n. □

Ciągi rekurencyjne. Kolejny sposób polega na znalezieniu rekurencji wiążącej szukane wielkości, a następnie jej rozwiązanie.

Przykład 1.10. Wyznaczyć liczbę n-elementowych ciągów o wyrazach ze zbioru $\{0, 1, 2, 3\}$, zawierających parzystą liczbę zer.

Rozwiązanie. Oznaczmy szukaną liczbę przez a_n oraz niech b_n oznacza liczbę n-elementowych ciągów o wyrazach ze zbioru $\{0, 1, 2, 3\}$, zawierających *nieparzystą* liczbę zer. Rzecz jasna, zachodzi równość $a_n + b_n = 4^n =$ liczba wszystkich n-elementowych ciągów o wyrazach w zbiorze $\{0, 1, 2, 3\}$, ale nie będziemy tego potrzebować. Zwróćmy teraz uwagę, iż każdy ciąg $n+1$-elementowy o parzystej liczbie zer można otrzymać na dokładnie jeden z dwóch sposobów:

· dopisując 0 na końcu pewnego ciągu n-elementowego o nieparzystej liczbie zer,

· dopisując 1, 2 lub 3 na końcu pewnego ciągu n-elementowego o parzystej liczbie zer.

Wynika stąd rekurencja $a_{n+1} = 3a_n + b_n$, i w analogiczny sposób wykazujemy, iż $b_{n+1} = 3b_n + a_n$. Stąd

$$\begin{aligned} a_{n+2} = 3a_{n+1} + b_{n+1} = 3a_{n+1} + 3b_n + a_n &= 3a_{n+1} + 3(a_{n+1} - 3a_n) + a_n \\ &= 6a_{n+1} - 8a_n, \end{aligned}$$

dla $n = 1, 2, \ldots$. Jest to liniowa rekurencja rzędu 2; w celu jej rozwiązania, rozważmy równanie charakterystyczne $\lambda^2 = 6\lambda - 8$: otrzymujemy $\lambda = 2$ bądź $\lambda = 4$. Stąd $a_n = c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot 4^n$ dla $n \geq 1$. Podstawiając oczywiste równości $a_1 = 3$, $a_2 = 10$, dostajemy

$$\begin{cases} 2c_1 + 4c_2 = 3, \\ 4c_1 + 16c_2 = 10, \end{cases}$$

skąd $c_1 = c_2 = 1/2$ i ostatecznie $a_n = (2^n + 4^n)/2$. $\square$

Zwijanie sum za pomocą wielomianów i liczb zespolonych. Wykorzystując twierdzenia o dodawaniu i mnożeniu, często jako wynik otrzymujemy pewną sumę zależącą od symboli Newtona (por. Przykład 1.5 powyżej) i powstaje naturalne pytanie, czy nie można jej ,,zwinąć" do zwartego wzoru. Zaprezentujemy poniżej dwa przykłady, w których pomocne okażą się wielomiany oraz liczby zespolone.

Przykład 1.11. Udowodnić, że dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich k, m, n zachodzi równość

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{\ell=0}^{m} \binom{m}{\ell}\binom{n}{k-\ell}.$$

Rozwiązanie. Lewa strona to współczynnik przy x^k w wielomianie $(1+x)^{m+n}$. Z drugiej strony, zachodzi równość $(1+x)^{m+n} = (1+x)^m(1+x)^n$; rozpiszmy każdy z czynników $(1+x)^m$ oraz $(1+x)^n$ przy użyciu dwumianu Newtona, a następnie sprawdźmy współczynnik przy x^m po wymnożeniu nawiasów:

$$\left(\binom{m}{0} + \binom{m}{1}x + \ldots + \binom{m}{m}x^m\right)\left(\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \ldots + \binom{n}{n}x^n\right) = c \cdot x^m + \ldots.$$

W tym celu, spójrzmy na wyraz $\binom{m}{\ell}x^\ell$, pochodzący z pierwszego nawiasu. Daje on nietrywialny wkład we współczynnik stojący przy x^m wtedy i tylko wtedy, gdy trafia na wyraz $\binom{n}{k-\ell}x^{k-\ell}$ z drugiego nawiasu. Stąd współczynnik przy x^m jest równy prawej stronie tożsamości z treści zadania. $\square$

Uwaga. Powyższe zadanie można również udowodnić w sposób czysto kombinatoryczny. Lewa strona to liczba k-elementowych podzbiorów zbioru $m+n$ elementowego A. Rozbijmy ten zbiór na dwie części: $A = B \cup C$, gdzie $|B| = m$ oraz $|C| = n$. Wówczas, przy wybieraniu k-elementowej kombinacji zbioru A, mamy następujące możliwości:

· wybrać zero elementów ze zbioru B oraz k elementów ze zbioru C,
· wybrać jeden element ze zbioru B oraz $k-1$ elementów ze zbioru C,
 ...
· wybrać k elementów ze zbioru B oraz zero elementów ze zbioru C.

Wystarczy tylko zauważyć, że każda z powyższych możliwości prowadzi do odpowiedniego składnika po prawej stronie tożsamości, której dowodzimy. To kończy rozwiązanie. □

Przykład 1.12. Dany jest n-elementowy zbiór A. Na ile sposobów można wybrać podzbiór A mający liczbę elementów podzielną przez 3?

Rozwiązanie. Rzecz jasna, szukana liczba wyborów wynosi

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \dots .$$

Aby „zwinąć" powyższą sumę, niech $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ będzie zespolonym pierwiastkiem stopnia 3 z jedynki. Na mocy dwumianu Newtona, mamy

$$(1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \binom{n}{4} + \binom{n}{5} + \binom{n}{6} + \dots,$$

$$(1+w)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}w + \binom{n}{2}w^2 + \binom{n}{3} + \binom{n}{4}w + \binom{n}{5}w^2 + \binom{n}{6} + \dots$$

oraz

$$(1+w^2)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}w^2 + \binom{n}{2}w + \binom{n}{3} + \binom{n}{4}w^2 + \binom{n}{5}w + \binom{n}{6} + \dots .$$

Zauważmy, że $1 + w + w^2 = 0$; wobec tego, dodając powyższe trzy równości, otrzymujemy

$$2^n + (1+w)^n + (1+w^2)^n = 3\left[\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \dots\right].$$

Zatem szukana odpowiedź to $(2^n + (1+w)^n + (1+w^2)^n)/3$. □

1.4. **Liczby Catalana.** Przeanalizujemy teraz pokrótce pewien ważny ciąg liczbowy, pojawiający się w wielu naturalnych zagadnieniach kombinatorycznych. Definiujemy n-tą liczbę Catalana wzorem

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}, \qquad n = 0, 1, 2, \dots .$$

Omówimy poniżej dwa problemy, w których występuje powyższy ciąg.

Przykład 1.13. Wyznaczyć liczbę ścieżek w zbiorze $\{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 : 0 \le y \le x\}$, idących w prawo bądź w górę, startujących z punktu $(0,0)$ i kończących w punkcie (n,n).

Dowód. Ścieżki idące w prawo bądź w górę będziemy nazywać *monotonicznymi.* Zacznijmy od prostszego zagadnienia. Dla pewnych ustalonych a, $b \in \mathbb{Z}$, k, $\ell \in \mathbb{Z}_+$, wyznaczymy liczbę monotonicznych ścieżek łączących punkty (a, b) i $(a+k, b+\ell)$. Każda taka ścieżka składa się z $k+\ell$ skoków, z których k jest skierowanych w prawo, a ℓ w górę. Jest ona zadana w sposób wzajemnie jednoznaczny poprzez wybór k miejsc przeznaczony na skoki w prawo, a więc liczba takich ścieżek wynosi $\binom{k+\ell}{k}$.

Wróćmy teraz do wyjściowego problemu. Liczba wszystkich monotonicznych ścieżek łączących $(0,0)$ oraz (n,n) wynosi $\binom{2n}{n}$, jak właśnie wykazaliśmy, a więc wystarczy wyznaczyć liczbę ,,złych" monotonicznych ścieżek, tj. takich, które dochodzą do prostej $y = x+1$. Niech s będzie taką ścieżką i niech P będzie punktem z prostej $y = x+1$ odwiedzonym przez tę ścieżkę, posiadającym najmniejszą odciętą. Odbijmy fragment ścieżki, łączący punkty $(0,0)$ i P, względem prostej $y = x+1$, i ,,zlepmy" go z pozostałą częścią ścieżki. Opisana tu operacja zadaje bijekcję między klasą ,,złych" ścieżek oraz klasą monotonicznych ścieżek łączących punkt $(-1,1)$ z punktem (n,n). Wobec tego, na mocy rozumowania podanego we wstępie, liczba złych ścieżek wynosi $\binom{2n}{n-1}$, a stąd szukana odpowiedź wynosi

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = C_n. \quad \square$$

Przykład 1.14. Na ile sposobów można podzielić $n+2$-kąt foremny na trójkąty (zakładamy, że odcinki podziału muszą łączyć wierzchołki $n+2$-kąta)?

Rozwiązanie. Oznaczmy szukaną liczbę sposobów przez a_n. Wykażemy kombinatorycznie, że

$$(n+2)a_{n+1} = 2(2n+1)a_n, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

co w połączeniu z oczywistą równością $a_1 = 1$ doprowadzi do

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2(2n-1)}{n+1}a_{n-1} = \frac{2^2(2n-1)(2n-3)}{(n+1)n}a_{n-2} \\ &= \ldots = \frac{2^n(2n-1)!!}{(n+1)!}a_1 = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = C_n. \end{aligned}$$

Aby wykazać powyższą rekurencję, wybierzmy $n+2$-kąt foremny, ustalmy jeden z boków i pokolorujmy go na czerwono. Następnie, rozważmy dowolną triangulację; spośród $2n+1$ odcinków będących bokami otrzymanych trójkątów (wliczając także pokolorowany bok) wybieramy jeden, i orientujemy go, zaznaczając na nim strzałkę w jedną lub w drugą stronę. Jest $2 \cdot (2n+1) \cdot a_n$ takich operacji.

Następnie, wybierzmy $n+3$-kąt foremny, ustalmy jeden z boków i pokolorujmy go na czerwono. Rozważmy dowolną triangulację i wybierzmy jeden spośród $n+2$,,nieczerwonych" boków wielokąta, malując go na niebiesko. Takich operacji jest $(n+2) \cdot a_{n+1}$.

Opiszemy teraz bijekcję pomiędzy powyższymi dwiema klasami ,,upiększonych" triangulacji. Mianowicie, wybierzmy triangulację $n+3$-kąta i zgniećmy trójkąt mający niebieski bok do odcinka tak, by niebieski bok zredukował się do punktu. Następnie, odcinek powstały wskutek zlepienia dwóch pozostałych boków zorientujmy tak, by strzałka wskazywała w kierunku niebieskiego punktu. To prowadzi do opisanej wyżej triangulacji $n+2$-kąta; jak łatwo sprawdzić, zadana operacja jest w rzeczywistości bijekcją. To kończy rozwiązanie. $\square$

Zadania

1. Rzucono cztery razy sześcienną kostką do gry. Otrzymane liczby oczek zapisano w ciąg: przykładowo, $(5, 2, 1, 1)$.

(a) Ile jest możliwych wyników?

Ponadto, ile jest takich wyników, że

(b) pojawia się co najmniej jedna liczba nieparzysta?
(c) pojawiają się dokładnie dwie dwójki i jedna trójka?
(d) pojawia się podciąg trzech kolejnych liczb całkowitych?

2. Na ile sposobów można umieścić osiem pierścieni na czterech palcach u ręki, jeśli wiadomo, że

(a) pierścienie są nierozróżnialne;
(b) pierścienie są nierozróżnialne, na każdym palcu musi znaleźć się co najmniej jeden pierścień;
(c) pierścienie są rozróżnialne, kolejność pierścieni na palcu jest nieistotna;
(d) pierścienie są rozróżnialne, kolejność pierścieni na palcu jest istotna;
(e) pierścienie są rozróżnialne, kolejność pierścieni na palcu jest istotna, na każdym palcu musi znaleźć się co najmniej jeden pierścień;
(f) pierścienie są rozróżnialne, kolejność pierścieni na palcu jest istotna, na każdym palcu mają się znaleźć dokładnie dwa pierścienie.

3. Na ile sposobów można wybrać sześć liczb ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 49\}$ tak, aby żadne dwie liczby nie były kolejne?

4. Wyznaczyć liczbę dziewięcioliterowych słów jakie można utworzyć z pięciu liter A, dwóch liter B oraz dwóch liter C, jeżeli
(a) nie ma ograniczeń;
(b) słowo nie zawiera dwóch spółgłosek pod rząd;
(c) słowo nie zawiera dwóch liter A pod rząd.

5. Niech X będzie zbiorem punktów płaszczyzny $(x.y)$ o obydwu współrzędnych całkowitych. Drogą długości n nazywamy każdy ciąg $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ punktów zbioru X spełniający warunek $|P_{i-1}P_i| = 1$ dla $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Niech $F(n)$ będzie liczbą różnych dróg $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ o początku $P_0 = (0, 0)$ i końcu P_n położonym na prostej o równaniu $y = 0$. Udowodnić, że

$$F(n) = \binom{2n}{n}.$$

6. Na ile sposobów można wybrać dwa niepuste i rozłączne podzbiory zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$?

7. Wykazać, że liczba σ-ciał podzbiorów zbioru $\{1, ..., n\}$ wynosi $\frac{1}{e}\sum_{k\geq 0}\frac{k^n}{k!}$.

8. Wyznaczyć liczbę podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$, niezawierających pary kolejnych liczb.

9. (a) Wyznaczyć liczbę n-elementowych ciągów o wyrazach ze zbioru $\{0, 1, 2\}$, które nie zawierają dwóch zer pod rząd.

(b) Wyznaczyć liczbę n-elementowych ciągów o wyrazach ze zbioru $\{0,1,2\}$, które zawierają dokładnie k zer i nie zawierają dwóch zer pod rząd.

(c) Wykazać, że F_n, n-ty wyraz ciągu Fibonacciego, spełnia zależność

$$F_n = \sum_{k\geq 0} \binom{n-k-1}{k}.$$

10. Wykazać kombinatorycznie tożsamości

(a) dla dowolnego $n \geq 1$,

$$n2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}.$$

(b) dla dowolnych $m \leq n$,

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m}\binom{n}{k} = \binom{n}{m}2^{n-m}.$$

(c) dla dowolnych $1 \leq r \leq k \leq n$,

$$\binom{n}{k} = \sum_{\ell=r}^{n-k+r} \binom{n-\ell}{k-r}\binom{\ell-1}{r-1}.$$

(d) dla dowolnego $n > 1$ zachodzi równość

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k-n}\binom{n}{k}k^n = n!.$$

(e) dla dowolnych m, $n \geq 1$,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n}.$$

11. Pionek porusza się po liczbach całkowitych, w każdym ruchu przesuwając się do jednej z sąsiadujących liczb. Zakładamy, że pionek startuje z zera i wykonuje $2n$ ruchów, kończąc ponownie w zerze.

(a) Wyznaczyć liczbę takich trajektorii pionka, w których odwiedza on wyłącznie liczby całkowite nieujemne.

(b) Wyznaczyć liczbę takich trajektorii, że za wyjątkiem początkowego i końcowego położenia, pionek odwiedza tylko liczby całkowite dodatnie.

(c) Wykazać, że ciąg Catalana spełnia rekurencję

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}, \qquad n = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots.$$

12. Na ile sposobów można umieścić liczby 1, 2, ..., $2n$ w tablicy $2 \times n$ tak, by wyrazy w każdym wierszu i w każdej kolumnie tworzyły ciąg rosnący?

13. Rozpatrujemy drzewa, w których wyróżniono jeden wierzchołek i w których z każdego wierzchołka wychodzą albo dwie gałęzie - lewa i prawa, albo żadna gałąź. Wierzchołek z którego nie wychodzą gałęzie, nazywamy liściem. Wyznaczyć liczbę drzew powyższego typu o $n+1$ liściach.

2. Aksjomatyczna definicja prawdopodobieństwa

2.1. **Aksjomatyczna definicja, podstawowe własności.** Przypuśćmy, że wykonujemy pewien eksperyment losowy. Powstaje natychmiast pytanie: w jaki sposób opisać go matematycznie?

Zacznijmy od tego, iż możemy mówić o jego potencjalnych ,,najdrobniejszych" wynikach, które będziemy nazywać *zdarzeniami elementarnymi*. Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych oznaczamy literą Ω, a do oznaczenia zdarzeń elementarnych będziemy zazwyczaj używać litery ω bądź ω_1, ω_2, $\ldots$.

Przykłady:
1. Rzut monetą: możliwe dwa wyniki: $\Omega = \{O, R\}$.
2. Rzut kostką: możliwe sześć wyników: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

W wielu sytuacjach interesuje nas nie tyle konkretny wynik ω, ale to, czy należy on do wcześniej ustalonego podzbioru zbioru Ω. Takie podzbiory nazywamy *zdarzeniami* i będziemy je oznaczać literami A, B, C, $\ldots$.

Przykłady, c.d.:
3. Rzucamy dwa razy kostką, A - suma oczek wynosi 4. Wówczas

$$\Omega = \{(i, j) : 1 \leq i,\, j \leq 6\} \quad \text{i} \quad A = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}.$$

4. Rzucamy monetą aż do wypadnięcia orła, A - wykonano co najwyżej trzy rzuty. Wówczas

$$\Omega = \big\{(O), (R, O), (R, R, O), (R, R, R, O), \ldots\big\} \quad \text{i} \quad A = \big\{(O), (R, O), (R, R, O)\big\}.$$

5. Obrót tarczy w ruletce, A - strzałka zatrzymuje się w drugiej ćwiartce. Wówczas $\Omega = [0, 2\pi)$ i $A = [\pi/2, \pi]$.

Szczególne zdarzenia, interpretacje działań/relacji na zdarzeniach:
Ω - zdarzenie pewne,
$\emptyset$ - zdarzenie niemożliwe,
$A \cap B$ - zaszły oba zdarzenia A, B,
$A \cap B = \emptyset$ - zdarzenia się wykluczają (są rozłączne),
$A \cup B$ - zaszło A lub B,
A' - nie zaszło A (A' nazywamy zdarzeniem przeciwnym do A, bądź dopełnieniem zbioru A),
$A \setminus B = A \cap B'$ - zaszło A i nie zaszło B,
$A \subseteq B$ - A pociąga za sobą B.

W powyższych rozważaniach nie narzucaliśmy żadnych założeń dotyczących zdarzeń: zdarzeniem mógł być dowolny podzbiór zbioru Ω. Można pracować przy tym założeniu pod warunkiem że zbiór Ω jest co najwyżej przeliczalny: wówczas na zbiorze potęgowym 2^Ω można określić ,,sensowne" prawdopodobieństwa. Niestety, w ogólnej sytuacji nie jest to dopuszczalne (jeśli zbiór Ω jest mocy continuum, to na klasie 2^Ω nie da się w zasadzie określić sensownego prawdopodobieństwa). Aby obejść tę trudność, na ogół *wyróżnia* się klasę $\mathcal{F}$ zdarzeń, które są obiektem dalszych badań. Co zakładamy o $\mathcal{F}$? Rozsądna klasa powinna być zamknięta na branie przeliczalnych sum, iloczynów i zdarzenia przeciwnego; zakładamy więc, że $\mathcal{F}$ jest pewnym wyróżnionym σ-ciałem podzbiorów Ω. Przypomnijmy odpowiednią definicję.

Definicja 2.1. Rodzinę $\mathcal{F}$ podzbiorów Ω nazywamy σ-ciałem, jeśli

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad \emptyset \in \mathcal{F}, \\ &\text{(ii)} \quad A \in \mathcal{F} \Rightarrow A' \in \mathcal{F}, \\ &\text{(iii)} \quad A_1,\, A_2,\, \ldots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Parę $(\Omega, \mathcal{F})$ nazywamy *przestrzenią mierzalną*.

Przejdźmy teraz do definicji prawdopodobieństwa. Czym w ogóle jest to pojęcie i jakie powinno mieć własności? Chwila zastanowienia prowadzi nas do częściowej odpowiedzi na to pytanie: powinna być to funkcja określona na $\mathcal{F}$, przyjmująca wartości w zbiorze $[0,1]$. Aby zyskać więcej intuicji dotyczącej tego obiektu, wygodnie najpierw rozważyć tzw. częstość zdarzeń. Załóżmy, iż w pewnym doświadczeniu interesuje nas prawdopodobieństwo zajścia pewnego zdarzenia A. Powtórzmy to doświadczenie n razy i zdefiniujmy

$$\rho_n(A) = \frac{\text{liczba doświadczeń w których zaszło } A}{n}.$$

Jest to częstość względna zajścia zdarzenia A w serii n doświadczeń; spodziewamy się, iż dla dużych n liczba $\rho_n(A)$ powinna być bliska szansie zajścia zdarzenia A w pojedynczym doświadczeniu. Naturalnym pomysłem jest określenie

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n\to\infty} \rho_n(A).$$

Przyjmując taką definicję, napotykamy szereg uciążliwych problemów. Przede wszystkim, nie jest jasne, czy powyższa granica w ogóle istnieje. Po drugie, również nie jest jasne, czy powtarzając doświadczenia w dwóch seriach, za każdym razem otrzymamy tę samą granicę. Co prawda można przyjąć te dwie własności jako aksjomat - prowadzi to jednak do bardzo skomplikowanej definicji prawdopodobieństwa. Aby uniknąć tych nieprzyjemnych trudności, pójdziemy inną drogą. Znajdziemy zestaw prostszych i ewidentnych aksjomatów dotyczących prawdopodobieństwa, które wymuszają postulowana wyżej zbieżność częstości względnych.

Aby wprowadzić tę alternatywną definicję prawdopodobieństwa, spójrzmy jeszcze raz na częstość względną. Jak łatwo sprawdzić, ρ_n przyjmuje wartości w przedziale $[0,1]$ oraz posiada następujące własności:

(i) $\rho_n(\Omega) = 1$,

(ii) jeśli $A_1,\, A_2, \ldots$ są parami rozłączne, to $\rho_n\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_n(A_k)$.

Prowadzi to do następującej definicji, wprowadzonej przez Kołmogorowa w 1933 roku.

Definicja 2.2 (Aksjomatyczna definicja prawdopodobieństwa)**.** Niech $(\Omega, \mathcal{F})$ będzie ustaloną przestrzenią mierzalną. Funkcję $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$ nazywamy *prawdopodobieństwem*, jeśli

(I) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,

(II) dla dowolnych parami rozłącznych zdarzeń $A_1,\, A_2,\, \ldots$ zachodzi

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k).$$

Trójkę $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ nazywamy *przestrzenią probabilistyczną*.

Uwagi:

1. Prawdopodobieństwo jest więc miarą unormowaną na $(\Omega, \mathcal{F})$. Czasami będziemy mówić, że $\mathbb{P}$ jest *miarą probabilistyczną*.

2. Należy pamiętać, iż przy modelowaniu konkretnego doświadczenia losowego wybór przestrzeni probabilistycznej zależy tylko od nas. W wielu sytuacjach z warunków doświadczenia wynikają pewne postulaty, które w mniej czy bardziej jednoznaczny sposób zadają trójkę $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$; czasami jednak tak nie jest (por. paradoks Bertranda poniżej).

3. W przypadku gdy Ω jest zbiorem skończonym, warunek (II) można zastąpić przez

(II') dla dowolnych parami rozłącznych $A,\, B \in \mathcal{F},\ \mathbb{P}\left(A \cup B\right) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$,

co wynika z prostej indukcji. Istotnie, jeśli zbiory $A_1,\, A_2,\, \ldots$ są parami rozłączne, to dla dostatecznie dużych n (powiedzmy, $n \geq N$) mamy $A_n = \emptyset$, i wobec tego,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{N} A_k\right) &= \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{k=1}^{N-1} A_k\right) \cup A_N\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{N-1} A_k\right) + \mathbb{P}(A_N) \\
&= \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{k=1}^{N-2} A_k\right) \cup A_{N-1}\right) + \mathbb{P}(A_N) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{N-2} A_k\right) + \mathbb{P}(A_{N-2}) + \mathbb{P}(A_{N-1}) \\
&= \ldots \\
&= \sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k).
\end{aligned}$$

Jeśli jednak Ω jest zbiorem nieskończonym, to warunek (II') jest istotnie słabszy i na ogół nie wystarcza (por. Przykład 2.4 poniżej).

Twierdzenie 2.1 (Podstawowe własności prawdopodobieństwa)**.** *Przypuśćmy, że* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *jest przestrzenią probabilistyczną oraz* $A,\, B,\, A_1,\, A_2,\, \ldots \in \mathcal{F}$. *Wówczas*

(i) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

(ii) Jeśli $A_1,\, A_2,\, \ldots, A_n$ *są parami rozłączne, to* $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$.

(iii) $\mathbb{P}(A') = 1 - \mathbb{P}(A)$.

(iv) Jeśli $A \subseteq B$, *to* $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$ *oraz* $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

(v) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

(vi) $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$.

Dowód. (i) Stosujemy warunek (II) do ciągu $A_1 = A_2 = \ldots = \emptyset$. Szereg $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k)$ ma być zbieżny, co wymusza $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

(ii) Stosujemy warunek (II) do nieskończonego ciągu A_1, A_2, ..., A_n, $\emptyset$, $\emptyset$, ... i korzystamy z (i).

(iii) Wynika to natychmiast z (ii) zastosowanego do dwóch zbiorów: $A_1 = A$ i $A_2 = A'$.

(iv) Pierwsza część wynika z (ii) zastosowanego do zbiorów $A_1 = A$ i $A_2 = B \setminus A$. Druga część wynika z pierwszej oraz nierówności $\mathbb{P}(B \setminus A) \geq 0$.

(v) Na mocy (ii) zachodzi równość $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B \setminus A)$. Z drugiej strony, mamy $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(A \cap B)$ oraz $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(A \cap B)$, ponownie na mocy własności (ii). Łącząc te trzy równości dostajemy żądaną tożsamość.

(vi) Rozważmy pomocniczy ciąg zdarzeń, zadany przez $B_1 = A_1$ oraz $B_n = A_n \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1})$ dla $n \geq 2$. Wówczas, bezpośrednio z definicji, widzimy, że zdarzenia B_1, B_2, ... są rozłączne i $\bigcup_{k=1}^\infty B_k = \bigcup_{k=1}^\infty A_k$. Zatem

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^\infty A_k\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^\infty B_k\right) = \sum_{k=1}^\infty \mathbb{P}(B_k).$$

Wystarczy już tylko zauważyć, że $\mathbb{P}(B_n) \leq \mathbb{P}(A_n)$ dla wszystkich n, co wynika z własności (iv) oraz oczywistej inkluzji $B_n \subseteq A_n$, $n = 1, 2, \ldots$. □

Własność (v) z powyższego twierdzenia można uogólnić na przypadek skończonej liczby zbiorów. Zachodzi następujący fakt.

Twierdzenie 2.2 (Wzór właczeń i wyłączeń)**.** *Jeśli* $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$, *to*

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i<j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots$$
$$+ (-1)^{n+1}\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n).$$

Dowód tego twierdzenia jest taki sam jak w przypadku miary liczącej i opiera się na indukcji (patrz strony 1 i 2 powyżej). Szczegóły pozostawiamy czytelnikowi.

Twierdzenie 2.3 (Twierdzenie o ciągłości)**.** *Załóżmy, że* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *jest przestrzenią probabilistyczną oraz* $(A_n)_{n=1}^\infty$ *jest ciągiem zdarzeń.*

(i) Jeśli ciąg ten jest wstępujący (tzn. $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$*), to*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

(ii) Jeśli ciąg ten jest zstępujący (tzn. $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$*), to*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^\infty A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Dowód: (i) Rozważmy ciąg $(B_n)_{n\geq 1}$ zdarzeń, zadany przez

$$B_1 = A_1,\ \ B_2 = A_2 \setminus A_1,\ \ B_3 = A_3 \setminus A_2,\ \ \ldots.$$

Jak łatwo sprawdzić, zdarzenia B_1, B_2, ... są parami rozłączne, $\bigcup_{n=1}^{k} B_n = A_k$ dla dowolnego $k \geq 1$ oraz $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Zatem

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_n) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \mathbb{P}(B_n) = \lim_{k\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{k} B_n\right) = \lim_{k\to\infty} \mathbb{P}(A_k),\end{aligned}$$

gdzie w drugim przejściu korzystaliśmy z przeliczalnej addytywności miary $\mathbb{P}$, a w czwartym skorzystaliśmy z Twierdzenia 2.1 (ii).

(ii) Ciąg dopełnień $(A_n')_{n\geq 1}$ jest wstępujący, a zatem, korzystając z (i) oraz z praw de Morgana, mamy

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)'\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n'\right) = 1 - \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n') = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n).\end{aligned}$$ □

Przejdziemy teraz do przykładów.

2.2. **Schemat klasyczny (prawdopodobieństwo klasyczne).** Załóżmy, że Ω jest zbiorem skończonym, $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$ i wszystkie zdarzenia jednoelementowe są jednakowo prawdopodobne. Wówczas każdy zbiór jednoelementowy ma prawdopodobieństwo $1/|\Omega|$, a w konsekwencji, dla dowolnego $A \in \mathcal{F}$,

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Przykład 2.1. Rzucono dwa razy kostką. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że suma oczek wynosi 8?

Rozwiązanie. Rozpoczynamy od odpowiedniego modelu powyższego doświadczenia losowego. Pojedynczy wynik to ciąg dwuelementowy (i, j), gdzie oba wyrazy to liczby ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Wobec tego $|\Omega| = 36$. Założenie, że każda para (i, j) ma tę samą szansę pojawienia się, jest tu jednym sensownym wyborem prawdopodobieństwa (w treści nie ma ani słowa o tym, że kostka nie jest prawidłowa). Wobec tego przyjmujemy, że mamy do czynienia ze schematem klasycznym. Wystarczy już tylko zauważyć, że

$$A = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\},$$

skąd $|A| = 5$ i $\mathbb{P}(A) = 5/36$.

Można próbować modelować powyższe doświadczenie biorąc, jako jego wynik, *zbiór* złożony z uzyskanych liczb oczek; innymi słowy, określmy

$$\Omega = \big\{\{i, j\} : i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\big\}.$$

Wówczas, jak łatwo się przekonać, $|\Omega| = 21$ (jest 15 dwuelementowych podzbiorów oraz 6 jednoelementowych podzbiorów zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$). Ponadto,

$$A = \big\{\{2, 6\}, \{3, 5\}, \{4\}\big\},$$

skąd $|A|/|\Omega| = 1/7$. Otrzymaliśmy inny wynik niż poprzednio: jest to związane z tym, że przy obecnym wyborze Ω, zdarzenia jednoelementowe *nie są jednakowo* *prawdopodobne.* Istotnie, przykładowo, zbiór $\{4\}$, odpowiadający liczbom oczek 4 i 4, ma dwa razy mniejszą szansę niż $\{1, 3\}$, który może być zrealizowany na dwa sposoby: 1 i 3, lub 3 i 1. Innymi słowy, wybór prawdopodobieństwa klasycznego nie jest tu sensownym wyborem. □

Przykład 2.2. Z urny zawierającej 5 kul białych i 4 kule czarne losujemy kolejno po jednej kuli bez zwracania. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że
a) pierwsza kula jest biała,
b) druga kula jest biała,
c) ostatnia kula jest biała.

Rozwiązanie. Bardzo łatwo określić przestrzeń probabilistyczną opisującą powyższe doświadczenie. Mianowicie, ponumerujmy kule: wówczas w urnie znajdują się elementy B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, C_1, C_2, C_3, C_4, i Ω to zbiór wszystkich permutacji tych kul. Ponadto, $|\Omega| = 9!$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$ oraz $\mathbb{P}$ jest prawdopodobieństwem klasycznym.

Oznaczmy zdarzenia opisane w a), b) oraz c) przez A, B oraz C, odpowiednio. Mamy $|A| = 5 \cdot 8!$, a więc $\mathbb{P}(A) = 5/9$. Aby wyznaczyć $\mathbb{P}(B)$ oraz $\mathbb{P}(C)$, można spróbować policzyć $|B|$ i $|C|$ „na piechotę"; my postąpimy inaczej. Mianowicie, transpozycja

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_9) \mapsto (a_2, a_1, a_3, a_4, \ldots, a_9)$$

zadaje bijekcję między zdarzeniami elementarnymi sprzyjającymi A i B; stąd $|A| = |B|$ i $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) = 5/9$. Analogicznie wykazujemy, że $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(A) = 5/9$.

Można to zadanie rozwiązać inaczej, bez numerowania i odróżniania kul. Mianowicie, wynikiem losowania jest wybór pięciu miejsc spośród dziewięciu, na których znajdą się białe kule. Zatem

$$\Omega = \big\{\text{pięcioelementowe kombinacje zbioru } \{1, 2, \ldots, 9\}\big\}.$$

Przyjmujemy $\mathcal{F} = 2^\Omega$ oraz zakładamy, że $\mathbb{P}$ jest prawdopodobieństwem klasycznym. Wówczas

$$|A| = |B| = |C| = \binom{1}{1}\binom{8}{4}.$$

Istotnie: biała kula musi znaleźć się na wyróżnionym miejscu (tzn. pierwszym, drugim lub dziewiątym - w zależności od tego, czy badamy A, B czy C). Pozostaje osiem miejsc, spośród których wybieramy pozostałe cztery. Stąd

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{\binom{8}{4}}{\binom{9}{5}} = \frac{5}{9}. \qquad \square$$

Przykład 2.3. Przetasowano talię 52 kart i ciągnięto kolejno po jednej karcie aż do momentu wyciągnięcia pierwszego asa. Co jest bardziej prawdopodobne: to, że następna karta będzie asem pik, czy to, że następna karta będzie dwójką trefl?

Rozwiązanie. Możemy przyjąć, że odkrywamy kolejno wszystkie 52 karty. Wówczas Ω to zbiór wszystkich permutacji talii kart (a więc $|\Omega| = 52!$), za $\mathcal{F}$ możemy wziąć 2^Ω, i jasne jest, że jedynym rozsądnym wyborem dla $\mathbb{P}$ jest prawdopodobieństwo klasyczne. Rozważmy zdarzenia

A - po pierwszym asie występuje as pik,
B - po pierwszym asie występuje walet kier.

Aby wyznaczyć moc A, zwróćmy uwagę, iż każda permutacja talii kart może być jednoznacznie zrealizowana w następujący sposób: wyrzućmy z talii asa pik; następnie ustawmy pozostałe karty w dowolny ciąg; wreszcie, dołóżmy asa pik do tego ciągu, umieszczając go na jednej z możliwych 52 pozycji. Patrząc w ten sposób na permutacje, widać, że moc A wynosi $51! \cdot 1$: po spermutowaniu wszystkich kart niebędących asem pik, as pik ma tylko jedno miejsce, stojące za pierwszym asem. Stąd

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{51!}{52!} = \frac{1}{52}.$$

Zwróćmy uwagę, że dokładnie to samo rozumowanie pozostaje w mocy gdy asa pik zastąpimy waletem kier (bądź inną ustaloną kartą). Stąd prawdopodobieństwo zdarzenia B również wynosi $1/52$.

Jest to wynik, który może nieco przeczyć intuicji. Wydaje się, że prawdopodobieństwo zdarzenia A powinno być mniejsze: skoro patrzymy na kartę występującą po pierwszym asie, szanse asa pik powinny być mniejsze. Powyższy rachunek wykazuje jednak, że tak nie jest. □

Przykład 2.4. Omówimy teraz ciekawy paradoks, związany z losowym wyborem liczby naturalnej. Otóż doświadczenie opisane słowami ,,wybieramy losowo liczbę naturalną; wybór każdej liczby jest tak samo prawdopodobny" nie daje się opisać za pomocą powyższego modelu (aksjomatyki Kołmogorowa). Istotnie, gdyby stosowne prawdopodobieństwo $\mathbb{P}$ istniało i zachodziłby warunek $\mathbb{P}(\{i\}) = \mathbb{P}(\{j\})$ dla dowolnych i, $j \in \mathbb{N}$, to wówczas równość

$$1 = \mathbb{P}(\mathbb{N}) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(\{j\})$$

nie mogłaby mieć miejsca. Czasami w literaturze można napotkać następującą próbę obejścia tego problemu: mianowicie, dla podzbioru $A \subseteq \mathbb{N}$ określmy

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{|A \cap \{0, 1, 2, \ldots, n\}|}{n+1},$$

o ile granica istnieje. Funkcja $\mathbb{P}$ posiada szereg pożądanych własności. Przykładowo, dla dowolnego $m = 1, 2, \ldots$, zdarzenie ,,wylosowana liczba dzieli się przez m", odpowiada zbiorowi $A = \{0, m, 2m, 3m, \ldots\}$ i ma prawdopodobieństwo $1/m$. Napotykamy jednak szereg uciążliwych problemów. Po pierwsze, klasa ,,dobrych" zbiorów A (dla których powyższa granica istnieje) nie jest nawet ciałem: jeśli $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$ istnieją, to $\mathbb{P}(A \cap B)$ już na ogół nie musi. Istotnie: niech A będzie zbiorem nieujemnych liczb parzystych. Ponadto, ustalmy ciąg $N_1 < N_2 < N_3 < \ldots$ i określmy

$$\begin{aligned} B = &\{\text{liczby parzyste z przedziału } [0, N_1)\} \\ &\cup \{\text{liczby nieparzyste z przedziału } [N_1, N_2)\} \\ &\cup \{\text{liczby parzyste z przedziału } [N_2, N_3)\} \\ &\cup \{\text{liczby nieparzyste z przedziału } [N_3, N_4)\} \cup \ldots. \end{aligned}$$

Widać, że jeśli ciąg $(N_j)_{j=1}^{\infty}$ rośnie dostatecznie szybko, to

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|(A \cap B) \cap \{0, 1, 2, \ldots, n\}|}{n+1} = \frac{1}{2}$$

oraz

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{|(A \cap B) \cap \{0, 1, 2, \ldots, n\}|}{n+1} = 0,$$

a więc granica

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|(A \cap B) \cap \{0, 1, 2, \ldots, n\}|}{n+1}$$

nie istnieje. Kolejny problem dotyczy ,,prawdopodobieństwa" $\mathbb{P}$ określonego wyżej. Funkcja $\mathbb{P}$ przyjmuje wartości w przedziale $[0,1]$ oraz $\mathbb{P}(\mathbb{N})=1$. Ponadto, jak łatwo sprawdzić, $\mathbb{P}$ jest skończenie addytywna: $\mathbb{P}(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_N)=\mathbb{P}(A_1)+\mathbb{P}(A_2)+\ldots+\mathbb{P}(A_N)$ dla dowolnych parami rozłącznych zbiorów A_1, A_2, …, A_N dla których ,,prawdopodobieństwa" $\mathbb{P}(A_1)$, $\mathbb{P}(A_2)$, …, $\mathbb{P}(A_N)$ istnieją. Niestety, funkcja $\mathbb{P}$ nie spełnia przeliczalnej addytywności. Istotnie, jak łatwo sprawdzić, mamy $\mathbb{P}(\{j\})=0$ dla dowolnego $j\in\mathbb{N}$, skąd

$$\sum_{j=0}^{\infty}\mathbb{P}(\{j\})=0.$$

Z drugiej strony, jak już zauważyliśmy wcześniej, mamy

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=0}^{\infty}\{j\}\right)=\mathbb{P}(\mathbb{N})=1,$$

a więc $\mathbb{P}$ nie jest prawdopodobieństwem jak w powyższej definicji.

Przykład 2.5. Zastanówmy się nad następującą kontynuacją powyższych rozważań. Mianowicie, czy istnieje miara probabilistyczna $\mathbb{P}$ (w sensie Definicji 2.2 powyżej) na $(\mathbb{N},2^{\mathbb{N}})$ taka, że dla wszystkich $k\geq 1$,

$$\mathbb{P}(\{\text{wylosowana liczba jest podzielna przez k}\})=\frac{1}{k}\,? \tag{2.1}$$

Przypuśćmy, że istnieje takie prawdopodobieństwo $\mathbb{P}$. Niech $p_1<p_2<\ldots$ będzie ciągiem wszystkich liczb pierwszych i niech

$$A_{p_j}=\{\text{wylosowana liczba dzieli się przez } p_j\}.$$

Korzystając ze wzoru włączeń i wyłączeń oraz (2.1) mamy, dla dowolnych $m\leq n$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_{p_m}\cup A_{p_{m+1}}\cup\ldots\cup A_{p_n})&=\sum_{m\leq k\leq n}\mathbb{P}(A_{p_k})-\sum_{m\leq k<\ell\leq n}\mathbb{P}(A_{p_k}\cap A_{p_\ell})+\ldots\\&=\sum_{m\leq k\leq n}\frac{1}{p_k}-\sum_{m\leq k<\ell\leq n}\frac{1}{p_kp_\ell}+\ldots\\&=1-\left(1-\frac{1}{p_m}\right)\left(1-\frac{1}{p_{m+1}}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_n}\right).\end{aligned}$$

Z drugiej strony, wiadomo, że szereg $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{p_k}$ jest rozbieżny. Wobec tego, na mocy twierdzenia o ciągłości,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=m}^{\infty}A_{p_k}\right)=\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(A_{p_m}\cup A_{p_{m+1}}\cup\ldots\cup A_{p_n})=1,$$

dla każdego m. Zdarzenie stojące po lewej stronie to ,,wylosowana liczba dzieli się przez co najmniej jedną z liczb p_m, p_{m+1}, …". Niech teraz j będzie dowolną liczbą całkowitą dodatnią. Oczywiście istnieje m takie, że liczby p_m, p_{m+1}, … są większe niż j; w konsekwencji,

$$j\notin\bigcup_{k=m}^{\infty}A_{p_k},$$

a więc $\mathbb{P}(\{j\})=0$. Zatem, z dowolności j, dostajemy $\mathbb{P}(\Omega)=\mathbb{P}(\mathbb{N})=0$. Otrzymana sprzeczność pokazuje, iż nie istnieje miara probabilistyczna spełniająca warunek (2.1) dla wszystkich k.

Przykład 2.6. Na loterii jest 10 losów wygrywających, 100 losów przegrywających i 1000 losów uprawniających do ponownego losowania. Kupujemy los, a następnie gramy aż do momentu wyciągnięcia losu przesądzającego o wygranej bądź przegranej (w przypadku uzyskania losu ,,przejściowego", nie zwracamy go z powrotem). Jakie jest prawdopodobieństwo wygranej?

Rozwiązanie. Ponumerujmy losy: mamy więc 10 losów wygrywających W_1, W_2, ..., W_{10}, 100 losów przegrywających L_1, L_2, ..., L_{100} oraz 1000 losów ,,przejściowych" $T_1, T_2, \ldots, T_{1000}$. Spróbujmy określić przestrzeń probabilistyczną opisującą powyższy eksperyment losowy. Pierwszy pomysł polega na rozważeniu różnowartościowych ciągów:

$$\Omega = \big\{(a_1, a_2, \ldots, a_k) : a_1,\ a_2, \ldots, a_{k-1} \in \{T_1, T_2, \ldots, T_{1000}\},\\ a_k \in \{W_1, W_2, \ldots, W_{10}, L_1, L_2, \ldots, L_{100}\}\big\}$$

- wypisujemy kolejno wyciągnięte ,,przejściowe" losy oraz, na ostatniej pozycji, umieszczamy decydujący los. Niestety, przy takim wyborze Ω, nie powinniśmy używać prawdopodobieństwa klasycznego: intuicyjnie jasne jest, że (przykładowo) ciągi (W_1) oraz $(T_1, T_2, T_3, \ldots, T_{1000}, W_1)$ nie powinny mieć tego samego prawdopodobieństwa.

Aby rozwiązać ten problem, spróbujmy patrzeć wyłącznie na ostatni wylosowany los; wówczas $\Omega = \{W_1, W_2, \ldots, W_{10}, L_1, L_2, \ldots, L_{100}\}$. Co więcej, z symetrii losów widać, że rozsądnie jest przyjąć, że zdarzenia jednoelementowe są równoprawdopodobne. Stąd natychmiast widzimy, że szukane prawdopodobieństwo wynosi $10/110 = 1/11$. □

2.3. **Prawdopodobieństwo zadane przez miary atomów.** Załóżmy, że $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ jest zbiorem co najwyżej przeliczalnym oraz p_1, p_2, ... - liczby nieujemne o sumie 1. Wówczas wybór $\mathcal{F} = 2^\Omega$ oraz $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i$, $i = 1, 2, \ldots$, jednoznacznie zadaje przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$: dla każdego $A \in \mathcal{F}$ mamy

$$\mathbb{P}(A) = \sum_i 1_A(\omega_i) p_i,$$

gdzie 1_A to *funkcja wskaźnikowa (charakterystyczna)* bądź *indykator* zbioru A:

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } \omega \in A, \\ 0 & \text{jeśli } \omega \notin A. \end{cases}$$

Przykład 2.7. Rzucamy prawidłową monetą aż do momentu, gdy wyrzucimy orła. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wykonamy dokładnie k rzutów?

Rozwiązanie. Jeśli jako wynik doświadczenia weźmiemy liczbę rzutów, to $\Omega = \{1, 2, \ldots, \infty\}$. W celu wyznaczenia prawdopodobieństwa zdarzenia $\{k\}$, spójrzmy na pokrewny problem. Rzucamy k razy monetą; jaka jest szansa, że w pierwszych $k-1$ pierwszych rzutach wypadają reszki, a w ostatnim rzucie wypada orzeł? To zagadnienie łatwo analizujemy przy użyciu prawdopodobieństwa klasycznego: wynik to $1/2^k$. □

2.4. **Prawdopodobieństwo geometryczne.** Załóżmy, że $\Omega \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, tzn. Ω jest podzbiorem borelowskim $\mathbb{R}^d$, przy czym $0 < |\Omega| < \infty$ (tu $|\cdot|$ oznacza miarę

Lebesgue'a w $\mathbb{R}^d$). Niech $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\Omega)$ będzie σ-ciałem podzbiorów borelowskich Ω, a miara probabilistyczna $\mathbb{P}$ będzie zadana przez

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Wówczas trójka $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ jest przestrzenią probabilistyczną. Przestrzeń tę wykorzystujemy do modelowania doświadczenia polegającego na losowaniu (na chybił trafił) punktu ze zbioru Ω.

Przykład 2.8. Z przedziału $[0, 1]$ wybieramy losowo dwie liczby. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że obie te liczby są mniejsze niż $1/2$?

Rozwiązanie. Oznaczmy wybrane liczby przez x i y. Widzimy, że wynikiem powyższego doświadczenia jest para (x, y), skąd

$$\Omega = \{(x, y) : x,\ y \in [0, 1]\} = [0, 1]^2.$$

Jako σ-ciało $\mathcal{F}$ bierzemy klasę podzbiorów borelowskich Ω, a jako $\mathbb{P}$ bierzemy prawdopodobieństwo geometryczne na Ω.

Następnym krokiem jest zinterpretowanie badanego zdarzenia A jako podzbioru Ω. Otóż $A = \{(x, y) \in \Omega : x, \leq 1/2\} = [0, 1/2]^2$, a zatem

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{4}. \qquad \square$$

Przejdźmy teraz do kolejnego klasycznego zagadnienia.

Przykład 2.9. Kij złamano losowo w dwóch miejscach. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że z otrzymanych trzech kawałków da się zbudować trójkąt.

Rozwiązanie: sposób I. Rozpocznijmy od określenia przestrzeni probabilistycznej. Utożsamiając kij z odcinkiem $[0, 1]$, widzimy, iż wybieramy losowo dwie liczby należące do tego przedziału. Wobec tego, podobnie jak w poprzednim przykładzie, bierzemy $\Omega = [0, 1]^2$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0, 1]^2)$ oraz określamy $\mathbb{P}$ jako prawdopodobieństwo geometryczne.

Zoobaczmy teraz, jakiemu podzbiorowi Ω odpowiada zdarzenie A - z otrzymanych trzech odcinków da się zbudować trójkąt. Będziemy sprawdzać nierówność trójkąta. Rozważmy dwa przypadki.

1° $x \leq y$. Wówczas odcinki powstałe z podziału mają długości x, $y - x$ oraz $1 - y$. Da się zbudować z nich trójkąt, jeśli zachodzi każdy z trzech warunków

$$x + (y - x) > 1 - y \quad \text{(równoważnie: } y > 1/2\text{)},$$
$$(y - x) + 1 - y > x \quad \text{(równoważnie: } x < 1/2\text{)}$$

oraz

$$x + 1 - y > y - x \quad \text{(równoważnie: } y < x + 1/2\text{)}.$$

Powyższe nierówności opisują trójkąt o polu $1/8$, zawarty w Ω.

2° $y < x$. Rozumując analogicznie, ponownie otrzymujemy trójkąt o polu $1/8$ (rozłączny z poprzednim trójkątem).

Wobec tego, badane zdarzenie A ma pole $1/4$; zatem $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = 1/4$. $\square$

Rozwiązanie: sposób II. Obierzmy teraz inną przestrzeń probabilistyczną. Ponownie utożsamiamy kij z odcinkiem $[0, 1]$, ale tym razem przez x oznaczamy *niewiększą*, a przez y *niemniejszą* z wylosowanych liczb. To prowadzi do zbioru $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq y \leq 1\}$, który jest trójkątem o polu $1/2$. Dalej, określamy jak wyżej: $\mathcal{F} =$

$\mathcal{B}(\Omega)$ oraz $\mathbb{P}$ jest prawdopodobieństwem geometrycznym. Dalsze rozważania są takie same jak w poprzednim sposobie, przy czym musimy rozważyć tylko przypadek $1°$. Zdarzeniu A odpowiada trójkąt o polu $1/8$, a więc $\mathbb{P}(A) = |A|/|\Omega| = 1/4$. □

Rozwiązanie: sposób III. Tym razem spójrzmy nieco inaczej na połamanie kija (ponownie utożsamianego z odcinkiem $[0,1]$). Otrzymujemy wówczas trzy odcinki; oznaczmy długości pierwszych dwóch z nich - licząc ,,od lewej strony" - przez x oraz y (wówczas trzeci odcinek ma długość $1-x-y$). Wobec tego,

$$\Omega = \{(x,y) : x,\, y \geq 0,\, x+y \leq 1\}.$$

Ponadto, bierzemy $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\Omega)$ oraz określamy $\mathbb{P}$ jako prawdopodobieństwo geometryczne na Ω.

Z powstałych trzech odcinków da się zbudować trójkąt, jeśli $x < 1/2$, $y < 1/2$ oraz $x+y > 1/2$. Zaznaczając odpowiedni zbiór, widzimy, iż jest on trójkątem o polu $1/8$. Zatem $\mathbb{P}(A) = |A|/|\Omega| = 1/4$. □

We wszystkich trzech sposobach powyżej otrzymaliśmy ten sam wynik: $1/4$, pomimo, iż użyliśmy różnych przestrzeni probabilistycznych. Na ogół tak być nie musi, co ilustruje kolejny przykład.

Przykład 2.10 (Paradoks Bertranda)**.** Z okręgu o promieniu 1 wylosowano cięciwę AB. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że będzie ona dłuższa niż bok trójkąta równobocznego wpisanego w ten okrąg?

Przedstawimy trzy rozwiązania.

I) Ze względu na niezmienniczość okręgu na obroty, wylosowanie cięciwy AB możemy utożsamić z wylosowaniem miary kąta środkowego $\alpha = \angle AOB \in [0, 2\pi)$. Tak więc $\Omega = [0,2\pi)$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\Omega)$ oraz $\mathbb{P}$ jest prawdopodobieństwem geometrycznym. Cięciwa spełnia warunki zadania wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \in (2\pi/3, 4\pi/3)$, a zatem szukane prawdopodobieństwo wynosi

$$\mathbb{P}((2\pi/3, 4\pi/3)) = \frac{|(2\pi/3, 4\pi/3)|}{|[0,2\pi)|} = \frac{1}{3}.$$

II) Wylosowanie cięciwy można utożsamić z wylosowaniem jej środka. Mamy więc $\Omega = B(0,1)$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\Omega)$ i $\mathbb{P}$ jest prawdopodobieństwem geometrycznym. Cięciwa będzie spełniała żądane warunki wtedy i tylko wtedy, gdy jej środek będzie leżał wewnątrz koła o promieniu $1/2$ współśrodkowego z danym okręgiem, zatem szukane prawdopodobieństwo wynosi

$$\mathbb{P}([0,1/2)) = \frac{|B(0,1/2)|}{B(0,1)} = \frac{1}{4}.$$

III) Tak jak w poprzednim rozwiązaniu, bierzemy pod uwagę położenie środka cięciwy, lecz tym razem patrzymy na jego odległość od środka okręgu. Tak więc $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\Omega)$ i $\mathbb{P}$ jest prawdopodobieństwem geometrycznym. Cięciwa będzie spełniała warunki zadania jeśli jej środek będzie odległy od środka okręgu o mniej niż $1/2$. Zatem szukane prawdopodobieństwo wynosi

$$\mathbb{P}([0,1/2)) = \frac{|[0,1/2)|}{|[0,1]|} = \frac{1}{2}.$$

Tak więc widzimy, iż otrzymaliśmy trzy różne wyniki, stąd wyraz „paradoks” powyżej. Sprzeczności jednak tu nie ma - użyliśmy trzech różnych przestrzeni probabilistycznych do opisu tego samego doświadczenia losowego. Ogólnie rzecz ujmując, teoria prawdopodobieństwa nie rozstrzyga, jaki model doświadczenia należy wybrać; pozwala ona obliczać prawdopodobieństwa zdarzeń dopiero w sytuacji, gdy zadano już konkretną przestrzeń probabilistyczną.

Przykład 2.11. Z przedziału $[0,1]$ losujemy nieskończenie wiele punktów. Wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że w każdym otwartym przedziale zawartym w $[0,1]$, znajdzie się co najmniej jeden punkt.

Rozwiązanie. Przede wszystkim, zauważmy, iż wystarczy ograniczyć się do przedziałów o końcach wymiernych. Kolejnym krokiem jest zdefiniowanie odpowiedniej przestrzeni probabilistycznej. Sytuacja jest tu nieco bardziej złożona; każdy „pojedynczy” wynik doświadczenia to nieskończony ciąg $(x_1, x_2, \ldots)$ liczb z przedziału $[0,1]$, a więc $\Omega = [0,1]^{\mathbb{N}}$. Jako $\mathcal{F}$ bierzemy σ-ciało zbiorów borelowskich Ω (wyposażonej w topologię Tichonowa). Pojawia się problem określenia odpowiedniej miary probabilistycznej; otóż bierzemy miarę produktową, tzn. taką, że dla każdego podzbioru $A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_N \times [0,1] \times [0,1] \times \ldots$ mamy

$$\mathbb{P}(A) = \prod_{j=1}^{N} |A_j|.$$

Innymi słowy, jest to miara o tej własności, że jeśli zawęzimy rozważania do pierwszych N wylosowanych punktów, to odpowiadające prawdopodobieństwo na $[0,1]^N$ jest geometryczne. Można wykazać, iż taka miara $\mathbb{P}$ rzeczywiście istnieje, tzn. że podana wyżej definicja nie jest wewnętrznie sprzeczna.

Rozwiążmy najpierw następujący prostszy problem. Ustalmy liczby wymierne a, $b \in [0,1]$, $a < b$. Wykażemy, że z prawdopodobieństwem 1 przedział ten zawiera co najmniej jeden punkt. Zbadajmy zdarzenie przeciwne $A'_{a,b}$: żaden z wylosowanych punktów nie wpada do (a,b). Zdarzenie $A'_{a,b}$ jest zawarte w zdarzeniu B_n - żaden z *pierwszych* n punktów nie należy do B_n. Aby wyznaczyć prawdopodobieństwo B_n, posłużymy się prawdopodobieństwem geometrycznym: mamy

$$\Omega = [0,1]^n, \qquad B_n = \big([0,1] \setminus (a,b)\big)^n,$$

skąd $\mathbb{P}(B_n) = (1-b+a)^n$. W konsekwencji, $\mathbb{P}(A'_{a,b}) \leq \mathbb{P}(B_n) = (1-b+a)^n$, i zbiegając z n do nieskończoności otrzymujemy $\mathbb{P}(A'_{a,b}) = 0$, a więc $\mathbb{P}(A_{a,b}) = 1$.

Wystarczy już tylko zauważyć, że zdarzenie zadane w treści daje się wyrazić w postaci $\bigcap_{a,b \in \mathbb{Q} \cap [0,1],\, a<b} A_{a,b}$. Jest to przeliczalne przecięcie zbiorów pełnej miary, a więc ma prawdopodobieństwo 1. $\square$

Zadania

1. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ jest przestrzenią probabilistyczną, $A,\ B,\ C \in \mathcal{F}$.

a) Załóżmy, że $P(A \cup B) = 1/2,\ P(A \cap B) = 1/4,\ P(A \backslash B) = P(B \backslash A)$. Obliczyć $P(A)$ oraz $P(B \backslash A)$.

b) Załóżmy, że $A \cup B \cup C = \Omega,\ P(B) = 2P(A),\ P(C) = 3P(A),\ P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C)$. Wykazać, że $1/6 \leq P(A) \leq 1/4$.

c) Załóżmy, że $P(A) \geq 2/3,\ P(B) \geq 2/3,\ P(C) \geq 2/3,\ P(A \cap B \cap C) = 0$. Obliczyć $P(A)$.

2. W sali o $n+k$ miejscach siada w sposób losowy n osób. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że m uprzednio ustalonych miejsc zostanie zajętych ($m \leq n$).

3. Klasa liczy 15 uczniów. Nauczyciel wybiera na każdej lekcji na chybił trafił jednego ucznia do odpowiedzi. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że w ciągu 16 lekcji każdy uczeń będzie przepytany.

4. Każdy z n patyków połamano na dwie części, krótszą i dłuższą. Następnie, otrzymane kawałki połączono losowo w pary. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że krótsze kawałki połączyły się z dłuższymi?

5. W szafie jest n par butów. Wyjmujemy na chybił trafił k butów ($k \leq n$). Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że

a) wśród wyjętych butów jest co najmniej jedna para,

b) wśród wyjętych butów jest dokładnie jedna para.

6. Z urny zawierającej kule o numerach 1, 2, $\ldots$, n losujemy k razy po jednej kuli. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że numery wylosowanych kul zapisane w kolejności losowania tworzą ciąg rosnący, jeśli po każdym losowaniu kula:

(a) zostaje zwrócona do urny,

(b) nie zostaje zwrócona do urny.

7. W celu oszacowania liczby ryb w stawie złowiono n ryb i po oznakowaniu wypuszczono je z powrotem. Następnie znowu złowiono n ryb i okazało się, że k ryb jest oznakowanych. Dla jakiej liczby N ryb w stawie taki wynik jest najbardziej prawdopodobny?

8. Rozdano 52 karty czterem graczom, po 13 kart każdemu. Jakie jest prawdopodobieństwo, że każdy z graczy ma co najmniej jednego pika?

9. Jest N listów i N zaadaresowanych kopert z różnymi adresami. Każdy list odpowiada dokładnie jednemu adresowi i na odwrót. Włożono listy do kopert na chybił trafił, po jednym liście do każdej koperty. Obliczyć prawdopodobieństwo, że żaden list nie trafił do właściwej koperty.

10. W kolejce po bilety w cenie 10 zł ustawiło się $2n$ osób, z których połowa ma tylko dziesięciozłotówki, a druga połowa - tylko dwudziestozłotówki. Wszyscy kupują po jednym bilecie. Przed rozpoczęciem sprzedaży w kasie nie było pieniędzy. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że nikt z kolejki nie będzie musiał czekać na resztę?

11. Kij złamano losowo w dwóch punktach. Wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że najkrótszy z otrzymanych trzech kawałków ma długość mniejszą niż $1/4$?

12. Na nieskończoną szachownicę o boku 1 rzucono monetę o średnicy $\frac{2}{3}$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że a) moneta znajdzie się całkowicie we wnętrzu jednego z pól; b) przetnie się z dokładnie dwoma bokami szachownicy?

13. Z odcinka $[0,1]$ losujemy dwie liczby. Wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że są one od siebie odległe o co najmniej t, gdzie t jest ustaloną liczbą rzeczywistą.

14. Na płaszczyznę podzieloną na nieskończone pasy o szerokości d rzucono losowo igłę o długości ℓ ($\ell < d$). Wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że igła przetnie brzeg któregoś pasa.

15. Z przedziału $[0,1]$ losujemy liczbę. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że w jej rozwinięciu dziesiętnym nie pojawi się cyfra 9.

3. Prawdopodobieństwo warunkowe, wzór na prawdopodobieństwo całkowite, Wzór Bayesa, niezależność zdarzeń

3.1. **Prawdopodobieństwo warunkowe.** Przechodzimy teraz do kolejnego kluczowego pojęcia w teorii prawdopodobieństwa: prawdopodobieństwa warunkowego. Zacznijmy od następującego przykładu.

Przykład 3.1. Rzucamy dwa razy kostką, nie patrząc na uzyskane liczby oczek. Przypuśćmy, że każdy z możliwych 36 wyników jest tak samo prawdopodobny: tak więc każda para (i, j), gdzie i, $j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, ma szansę $1/36$. Załóżmy teraz, że ktoś inny obejrzał uzyskane liczby oczek i mówi nam, iż w sumie dają one 8. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w pierwszym rzucie kostką uzyskaliśmy dwójkę lub trójkę?

Jasne jest, iż nie dysponując tą dodatkową informacją podalibyśmy odpowiedź $1/3$. Istotnie, pojawienie się trójki w pierwszym rzucie oznacza, iż sprzyjające pary to $(3, 1)$, $(3, 2)$, $(3, 3)$, $(3, 4)$, $(3, 5)$, $(3, 6)$ oraz $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$, $(2, 5)$, $(2, 6)$, i każda z nich ma prawdopodobieństwo $1/36$. Jednakże, jeśli wiemy, że suma oczek jest 8, prawdopodobieństwo ulegnie zmianie. Istotnie, skoro suma wynosi 8, to musiała zajść jedna z pięciu możliwości: $(2, 6)$, $(3, 5)$, $(4, 4)$, $(5, 3)$ oraz $(6, 2)$. Ponadto, w wyjściowym doświadczeniu zakładaliśmy, że wszystkie pary (i, j) mają tę samą szansę na pojawienie się; stąd przyjmujemy, iż każdy z wypisanych pięciu przypadków ma prawdopodobieństwo $1/5$. Ponieważ w dokładnie dwóch z nich na pierwszej współrzędnej stoi dwójka lub trójka, widzimy, iż szukane prawdopodobieństwo wynosi $2/5$.

W ogólnej sytuacji, załóżmy, że $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ jest ustaloną przestrzenią probabilistyczną, A, B są zdarzeniami oraz naszym celem jest wyznaczenie $\mathbb{P}(A|B)$, prawdopodobieństwa zajścia zdarzenia A pod warunkiem zajścia zdarzenia B. Skoro zaszło zdarzenie B i interesuje nas zdarzenie A, to w rzeczywistości muszą zajść oba zdarzenia A i B. Ponadto, skoro zaszło zdarzenie B, to jest jasne, że zbiór B staje się naszą nową, zredukowaną przestrzenią zdarzeń elementarnych (por. przykład powyżej). Stąd naturalny pomysł, aby jako prawdopodobieństwo warunkowe wziąć iloraz $\mathbb{P}(A \cap B)$ i $\mathbb{P}(B)$. To motywuje następującą definicję.

Definicja 3.1. Załóżmy, że $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ jest przestrzenią probabilistyczną oraz A, $B \in \mathcal{F}$. Jeśli $\mathbb{P}(B) > 0$, to definiujemy $\mathbb{P}(A|B)$, prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A pod warunkiem zajścia zdarzenia B, wzorem

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Zanim przejdziemy do przykładów, warto poczynić tu pewną uwagę. Mianowicie, jeśli B jest ustalonym zdarzeniem o niezerowym prawdopodobieństwie, to funkcja $A \mapsto \mathbb{P}(A|B)$ spełnia warunki Kołmogorowa (czyli jest prawdopodobieństwem). Zatem trójka $(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{\mathbb{P}})$, gdzie $\tilde{\mathbb{P}}(A) = \mathbb{P}(A|B)$, jest ponownie przestrzenią probabilistyczną. Co więcej, jak należy się spodziewać po wcześniejszych uwagach, to samo jest prawdą o trójce $(B, \tilde{F}, \tilde{\mathbb{P}}')$, gdzie $\tilde{\mathcal{F}} = \{C \in \mathcal{F} : C \subseteq B\}$ oraz $\tilde{\mathbb{P}}' = \tilde{\mathbb{P}}|_{\tilde{\mathcal{F}}}$. Daje to alternatywną metodę podejścia do zadań na prawdopodobieństwo warunkowe. Pierwszym sposobem jest, oczywiście, skorzystanie z definicji; drugim sposobem jest przejście bezpośrednio do zredukowanej przestrzeni probabilistycznej $(B, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}')$: w wielu sytuacjach bardzo łatwo tę przestrzeń zidentyfikować.

Rozważmy teraz kilka przykładów.

Przykład 3.2. Rzucono pięć razy monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w ostatnim rzucie uzyskaliśmy orła, jeśli wiadomo, że w dokładnie trzech rzutach wypadła reszka?

Rozwiązanie, sposób I. Zacznijmy od określenia przestrzeni probabilistycznej. Rzecz jasna, mamy $\Omega = \{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) : a_i \in \{O, R\}\}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$ oraz $\mathbb{P}$ jest prawdopodobieństwem klasycznym. Niech A to zdarzenie ,,w ostatnim rzucie uzyskaliśmy orła" oraz B - ,,w dokładnie trzech rzutach wypadła reszka". Z definicji prawdopodobieństwa warunkowego oraz prawdopodobieństwa klasycznego, mamy

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{|A \cap B|}{|B|}$$

(warto tu podkreślić, iż powyższa równość zachodzi *zawsze*, gdy na wyjściowej przestrzeni Ω zadane jest prawdopodobieństwo klasyczne). Jak łatwo widać, mamy $|B| = \binom{5}{3}$ (z pięciu miejsc wybieramy trzy, na których będą stały reszki) oraz $|A \cap B| = \binom{4}{3}$ (z czterech pierwszych miejsc wybieramy trzy miejsca na których będą stały reszki - na pozostałych dwóch kładziemy orły). Stąd

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{5}{3}} = \frac{2}{5}. \qquad \square$$

Sposób II. Spróbujmy rozwiązać to zadanie poprzez badanie zredukowanej przestrzeni probabilistycznej. Wiemy, że w trzech rzutach wypadły reszki. Wobec tego, mamy do czynienia z losowaniem trzech liczb (bez zwracania) ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ - są to odpowiednie numery losowań, w których pojawiają się reszki. Zatem $\Omega = \{\text{trzyelementowe kombinacje zbioru } \{1, 2, 3, 4, 5\}\}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$ oraz $\mathbb{P}$ jest prawdopodobieństwem klasycznym. Interesujące nas zdarzenie odpowiada tym kombinacjom, które nie zawierają liczby 5: liczba takich kombinacji to $\binom{4}{3}$ (wybieramy ze zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$). Stąd powyższa odpowiedź. $\square$

Przykład 3.3. Z urny, zawierającej b białych kul i c czarnych kul, losujemy kolejno bez zwracania n kul ($n \leq b+c$). Wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że pierwsza wylosowana kula jest biała, jeśli wiadomo, że k spośród wylosowanych kul są białe.

Rozwiązanie, sposób I. Liczymy bezpośrednio z definicji. Ponumerujmy kule: B_1, B_2, $\ldots$, B_b, C_1, C_2, $\ldots$, C_c. Przetrzeń zdarzeń elementarnych to zbiór n elementowych wariacji bez powtórzeń zbioru kul, $\mathcal{F} = 2^\Omega$ oraz $\mathbb{P}$ jest prawdopodobieństwem klasycznym. Rozważmy zdarzenia A - pierwsza wylosowana kula jest biała, B - k spośród wylosowanych n kul to kule białe. Mamy

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{|A \cap B|}{|B|}.$$

Jak łatwo sprawdzić, zachodzi równość

$$|B| = \binom{b}{k}\binom{c}{n-k}n!.$$

Istotnie: wybieramy k białych kul, $n - k$ czarnych kul, a następnie wybrane kule ustawiamy w ciąg. Analogicznie rozumując, obliczamy, iż

$$|A \cap B| = b\binom{b-1}{k-1}\binom{c}{n-k}(n-1)!,$$

skąd $\mathbb{P}(A|B) = \frac{k}{n}$. $\square$

Sposób II. Spróbujmy operować na zredukowanej przestrzeni probabilistycznej. Dysponujemy ciągiem n kul, wśród których k jest białych (tym razem możemy założyć, że w obrębie ustalonego koloru, kule są nieodróżnialne). Zatem Ω to zbiór odpowiednich rozbić zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ (bądź permutacji z powtórzeniami) na podzbiory mocy k i $n-k$ - pierwszy ze zbiorów zadaje miejsca, na których będą stały kule białe; pozostałe miejsca są obsadzone przez czarne kule. Ponadto, $\mathcal{F} = 2^\Omega$ i jasne jest, że jako $\tilde{\mathbb{P}}$ należy wziąć prawdopodobieństwo klasyczne. Szukane prawdopodobieństwo warunkowe wynosi

$$\tilde{\mathbb{P}}(A) = \frac{\binom{n-1}{k-1,n-k}}{\binom{n}{k,n-k}} = \frac{k}{n}.$$

Istotnie, moc Ω wynosi $\binom{n}{k,n-k}$. Ponadto, zdarzenie A polega na tym, że wybrany k-elementowy podzbiór miejsc dla białych kul zawiera jedynkę. Każdy taki podzbiór jest jednoznacznie wyznaczony przez wybór $k-1$ liczb ze zbioru $\{2, 3, \ldots, n\}$ i dołożenie jedynki. □

Przykład 3.4. Z odcinka $[0, 1]$ wybieramy losowo dwie liczby. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że niewiększa z nich przekracza $1/3$, jeśli wiadomo, że suma liczb jest co najmniej jeden.

Rozwiązanie, sposób I. Bezpośrednio z treści zadania widzimy, iż możemy położyć $\Omega = [0, 1]^2$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\Omega)$ oraz przyjąć, że $\mathbb{P}$ jest prawdopodobieństwem geometrycznym. Dalej, korzystamy z definicji. Oznaczając A - niewiększa z wylosowanych liczb przekracza $1/3$ oraz B - suma liczb jest co najmniej jeden, mamy

$$A = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : x \geq 1/3 \text{ oraz } y \geq 1/3\}, \quad B = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : x + y \geq 1\}.$$

Stąd obliczamy, iż $|B| = 1/2$ oraz $|A \cap B| = 1/2 - 1/9 = 7/18$. Wobec tego,

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{|A \cap B|/|\Omega|}{|B|/|\Omega|} = \frac{7/18}{1/2} = \frac{7}{9}. \quad \Box$$

Sposób II. W tym zadaniu także możemy się posłużyć zredukowaną przestrzenią probabilistyczną. Informacja, iż suma wylosowanych liczb jest co najmniej jeden oznacza, iż możemy wziąć $\Omega = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : x + y \geq 1\}$. Następnie, kładziemy $\tilde{\mathcal{F}} = 2^\Omega$ i, po chwili zastanowienia, widzimy, iż możemy określić $\tilde{\mathbb{P}}$ jako prawdopodobieństwo geometryczne (ogólnie, prawdopodobieństwo geometryczne, po przejściu do przestrzeni zredukowanej, zawsze jest znowu prawdopodobieństwem geometrycznym). Obliczając teraz prawdopodobieństwo $\tilde{\mathbb{P}}(A)$, zauważamy iż otrzymujemy ułamki jak wyżej:

$$\tilde{\mathbb{P}}(A) = \frac{7/18}{1/2} = \frac{7}{9}. \quad \Box$$

Przykład 3.5. Talię 52 kart rozdano czterem graczom: N, E, S, W, po 13 kart każdemu. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że gracz E ma dokładnie trzy piki, jeśli wiadomo, że N oraz S mają łącznie dokładnie osiem pików.

Rozwiązanie. W tym przykładzie wygodnie jest przejść bezpośrednio do zredukowanej przestrzeni probabilistycznej. Wiadomo, że gracze N i S mają razem 26 kart, wśród których jest osiem pików. Oznacza to, że gracze E oraz W mają pozostałe 26 kart, w tym 5 pików. Spójrzmy teraz na losowanie kart graza E jak na wybór 13 spośród tych pozostałych 26 kart; oczywiście, każda możliwość ma to samo prawdopodobieństwo. Wobec tego, prawdopodobieństwo tego, że gracz E posiada dokładnie trzy piki, wynosi

$$\frac{\binom{5}{3}\binom{21}{10}}{\binom{26}{13}} \simeq 0.339. \qquad \square$$

Z prawdopodobieństwem warunkowym wiąże się szereg ciekawych paradoksów pokazujących, iż należy z ostrożnością używać intuicji przy jego badaniu. Omówimy tu dwa przykłady.

Przykład 3.6 (Paradoks więźnia)**.** W celi przebywa trzech więźniów, X, Y oraz Z, z których jeden ma zostać uwolniony następnego dnia. Więźniowie nie wiedzą, który z nich wyjdzie na wolność następnego dnia; wiedzę tę posiada starżnik pilnujący celi. Więzień X rozumuje następująco: ,,moje szanse na uwolnienie wynoszą $1/3$. Zapytam strażnika, który z więźniów Y oraz Z *nie* zostanie uwolniony. Wówczas moje szanse wzrosną do $1/2$". Gdzie tkwi błąd?

Nieścisłość tkwi w tym, iż nie sprecyzowano, w jaki sposób postępuje strażnik w momencie gdy uwonionym więźniem jest X. Ma on wówczas dwie możliwości: podać więźnia Y bądź więźnia Z. Przykładowo, załóżmy, że w takiej sytuacji podaje on odpowiedź alfabetycznie; wówczas informacja, iż w areszcie pozostanie Z, pozbawia więźnia X szans na uwolnienie (tzn. prawdopodobieństwo wynosi 0). Z drugiej strony, jeśli odpowiedź strażnika to ,,Y", wówczas rzeczywiście szanse na uwolnienie więźnia X wzrastają do $1/2$.

Przykład 3.7 (Paradoks Simpsona)**.** W urnach I oraz II znajduje się pewna liczba kul białych i pewna liczba kul czarnych. Ponadto, na każdej kuli napisano cyfrę 0 lub 1. Prawdopodobieństwo tego, że biała kula z urny I ma na sobie jedynkę jest większe niż prawdopodobieństwo, że biała kula z urny II ma na sobie jedynkę. Podobnie, prawdopodobieństwo tego, że czarna kula z urny I ma na sobie jedynkę jest większe niż prawdopodobieństwo, że czarna kula z urny II ma na sobie jedynkę. Czy wynika stąd, że prawdopodobieństwo wyciągnięcia z urny I kuli z jedynką jest większe niż prawdopodobieństwo wyciągnięcia z urny II kuli z jedynką?

Na pierwszy rzut oka wydaje się, iż odpowiedź jest twierdząca. Odsetek kul białych w urnie I, oznaczonych cyfrą 1 jest większy niż odpowiedni odsetek w urnie II, i analogiczna zależność ma miejsce w stosunku do kul czarnych, a więc w urnie I powinno być ,,procentowo" więcej kul z jedynką. Spójrzmy jednak na następujący ekstremalny przykład:

Urna I:	Urna II:
1 kula biała z jedynką	98 kul biąlych z jedynką,
0 kul białych z zerem	1 kula biała z zerem,
1 kula czarna z jedynką	0 kul czarnych z jedynką,
98 kul czarnych z zerem	1 kula czarna z zerem.

Widzimy, że prawdopodobieństwa tego, że wylosowana biała kula ma na sobie jedynkę, wynosi 1 dla urny I i $98/99$ dla urny II; odpowiadające prawdopodobieństwa dla kul czarnych wynoszą $1/99$ i 0. Wobec tego warunki opisane powyżej są spełnione; z drugiej strony, prawdopodobieństwo wyciągnięcia kuli z jedynką wynosi $1/50$ dla urny I oraz $98/100$ dla urny II.

Wyjaśnienie powyższego paradoksu tkwi w tym, iż podane proporcje czy też odsetki są wielkościami względnymi i w żaden sposób nie odnoszą się do bezwzględnych liczb (u nas: łącznych liczb białych i czarnych kul w urnie I oraz w urnie II).

Omówimy teraz pokrótce pewien ważny wzór, pozwalający wyrazić prawdopodobieństwo iloczynu zdarzeń przez iloczyn odpowiednich prawdopodobieństw warunkowych. Wzór ten przyda się dalej, przy omawianiu wzoru na prawdopodobieństwo całkowite oraz wzoru Bayesa.

Twierdzenie 3.1 (Prawdopodobieństwo iloczynu zdarzeń)**.** *Załóżmy, że* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *jest przestrzenią probabilistyczną oraz* A_1, A_2, $\ldots$, A_n *są zdarzeniami spełniającymi warunek* $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) > 0$. *Wówczas*

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)\\ &= \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})\mathbb{P}(A_{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_{n-2}) \ldots \mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_1).\end{aligned}$$

Dowód. Wystarczy zastosować definicję prawdopodobieństwa warunkowego. □

Przykład 3.8. W urnie znajduje się $n-1$ białych kul oraz jedna czarna. Losujemy po jednej kuli aż do momentu, gdy wylosujemy czarną kulę. jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wykonamy k losowań jeśli a) losujemy bez zwracania b) losujemy ze zwracaniem?

Rozwiązanie: Oznaczmy białe kule przez b_1, b_2, $\ldots$, b_{n-1}, a czarną kulę przez c. Mamy

$$\Omega = \{(c), (b_1, c), (b_2, c), \ldots, (b_{n-1}, c), (b_1, b_1, c), \ldots\},$$

$\mathcal{F} = 2^\Omega$, a prawdopodobieństwo zadane jest poprzez określenie mas poszczególnych zdarzeń jednoelementowych (por. Przykład 2 z poprzedniego wykładu).

Rozważmy zdarzenie A_i - i-ta kula jest biała, $i = 1, 2, \ldots$. Korzystając z powyższego twierdzenia, mamy

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(A_k' \cap A_{k-1} \cap A_{k-2} \cap \ldots \cap A_1)\\ &= \mathbb{P}(A_k'|A_{k-1} \cap \ldots \cap A_1)\mathbb{P}(A_{k-1}|A_{k-2} \cap \ldots \cap A_1) \ldots \mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_1).\end{aligned}$$

a) Z warunków zadania wynika, że

$$\mathbb{P}(A_i|A_{i-1} \cap \ldots \cap A_1) = \frac{n-i}{n-i+1}, \quad \mathbb{P}(A_k'|A_{k-1} \cap \ldots \cap A_1) = \frac{1}{n-k+1},$$

a zatem szukane prawdopodobieństwo wynosi

$$\frac{1}{n-k+1} \cdot \frac{n-k+1}{n-k+2} \cdot \frac{n-k+2}{n-k+3} \cdot \ldots \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}.$$

b) Tym razem mamy

$$\mathbb{P}(A_i|A_{i-1} \cap A_{i-2} \cap \ldots \cap A_1) = \frac{n-1}{n},$$

a więc szukane prawdopodobieństwo jest równe

$$\left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}.$$

□

Przykład 3.9. Talię 52 kart rozdano losowo między czterech graczy, po 13 kart każdemu. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że każdy z graczy otrzymał asa?

Rozwiązanie. Wprowadźmy zdarzenia

A − as pik powędrował do któregoś z graczy,
B − as pik i as kier powędrowały do różnych graczy,
C − as pik, as kier i as karo powędrowały do różnych graczy,
D − każdy z graczy otrzymał asa.

Interesuje nas prawdopodobieństwo $\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(A \cap B \cap C \cap D)$. Spójrzmy na rozdanie kart jak na permutację talii, przy czym pierwsze trzynaście kart trafia do gracza N, kolejne trzynaście do gracza E, kolejne trzynaście do gracza S i ostatnie trzynaście do gracza W. Rzecz jasna, zachodzi równość $\mathbb{P}(A) = 1$. Ponadto, mamy $\mathbb{P}(B|A) = 39/51$: istotnie, as kier ma 51 równoprawdopodobnych miejsc do wyboru, z czego 39 prowadzi do gracza nieposiadającego asa pik. Rozumując analogicznie, dostajemy $\mathbb{P}(C|A \cap B) = 26/50$ oraz $\mathbb{P}(D|A \cap B \cap C) = 13/49$. Stąd odpowiedź

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C \cap D) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(C|A \cap B)\mathbb{P}(D|A \cap B \cap C) = \frac{39 \cdot 26 \cdot 13}{51 \cdot 50 \cdot 49}. \quad \square$$

3.2. **Wzór na prawdopodobieństwo całkowite i wzór Bayesa.** Wzór na prawdopodobieństwo całkowite służy do badania wyników doświadczeń, które składają się z kilku etapów. Zacznijmy od następującego prostego zadania.

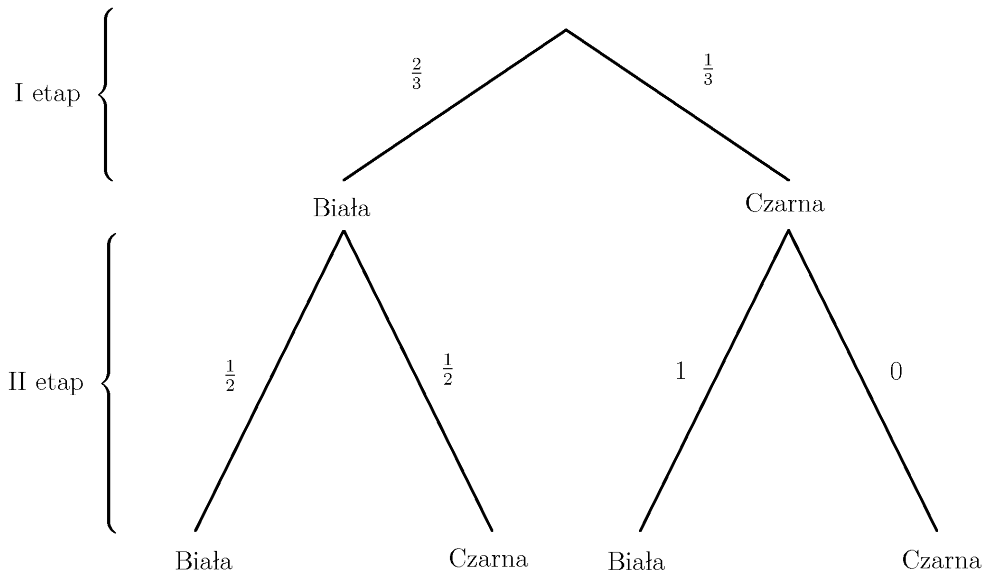
Przykład 3.10. W urnie I znajdują się dwie kule białe i jedna czarna. Losujemy kulę (nie oglądamy jej) i odkładamy na bok. Następnie, z urny losujemy kulę. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że kula wyciągnięta w drugim losowaniu jest biała?

Rozwiązanie. Opisane wyżej doświadczenie losowe składa się z dwóch etapów. Pierwszym etapem jest wylosowanie pierwszej kuli, a drugim - ponowne wyciągnięcie kuli z urny. Są dwa możliwe wyniki pierwszego etapu: H_1 - wylosowano kulę białą, H_2 - wylosowano kulę czarną. Są to parami rozłączne możliwości i wyczerpują one wszystkie możliwe przypadki: formalnie, zachodzą równości $H_1 \cap H_2 = \emptyset$ oraz $H_1 \cup H_2 = \Omega$. Oznaczmy interesujące nas zdarzenie przez A. Korzystając ze wzoru na prawdopodobieństwo warunkowe, możemy napisać

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap H_1) + \mathbb{P}(A \cap H_2) = \mathbb{P}(A|H_1)\mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(A|H_2)\mathbb{P}(H_2)$$

(zwróćmy uwagę, iż w ostatnim przejściu skorzystaliśmy z tego, że $\mathbb{P}(H_1) > 0$ i $\mathbb{P}(H_2) > 0$; w przeciwnym razie, prawdopodobieństwa warunkowe nie miałyby sensu). Powyższa równość to szczególny przypadek wzoru na prawdopodobieństwo całkowite (por. Twierdzenie 3.2 poniżej). Z warunków zadania wynika wprost, że $\mathbb{P}(H_1) = 2/3$, $\mathbb{P}(H_2) = 1/3$, $\mathbb{P}(A|H_1) = 1/2$ oraz $\mathbb{P}(A|H_2) = 1$. Wobec tego, $\mathbb{P}(A) = 2/3$.

Czasami, zwłaszcza w sytuacji gdy badane doświadczenie składa się z większej liczby etapów, warto zilustrować zadanie za pomocą odpowiedniego drzewa. W przypadku naszego zadania, odpowiadające drzewo jest przedstawione na Rysunku 1 poniżej. Jak widzimy, pierwsze rozgałęzienie drzewa bierze pod uwagę pierwszy etap: ponadto, liczby przypisane gałęziom to prawdopodobieństwa zajścia zdarzeń H_1 oraz H_2 (utożsamionym ze słowami ,,Biała" oraz ,,Czarna", odpowiednio). W kolejnych rozgałęzieniach, liczby stojące przy danych odcinkach to prawdopodobieństwa warunkowe $\mathbb{P}(A|H_1)$, $\mathbb{P}(A'|H_1)$, $\mathbb{P}(A|H_2)$ oraz $\mathbb{P}(A'|H_2)$. Podana ilustracja pozwala szybko wyliczać prawdopodobieństwa szukanych zdarzeń. Przykładowo, zdarzenie A opowiada dwóm słowom ,,Biała" stojącym w dolnym rzędzie;



Rysunek 1. Drzewo ilustrujące Przykład 3.10

każde z tych słów wiąże się z pewną ,,podwójną" gałęzią prowadzącą od wierzchołka drzewa. Szukane prawdopodobieństwo otrzymujemy przez wymnożenie liczb w obrębie każdej gałęzi, a następnie zsumowaniu otrzymanych iloczynów: u nas,

$$\mathbb{P}(A) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}. \qquad \square$$

Przejdźmy teraz do sytuacji ogólnej.

Definicja 3.2. Załóżmy, że $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ jest zadaną przestrzenią probabilistyczną. *Rozbiciem* nazywamy dowolną rozdzinę $(H_i)_{i \in I}$ parami rozłącznych zdarzeń, której sumą jest zbiór Ω.

Twierdzenie 3.2 (Wzór na prawdopodobieństwo całkowite)**.** *Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ będzie ustaloną przestrzenią probabilistyczną oraz załóżmy, że $(H_i)_{i \in I}$ jest rozbiciem takim, że $\mathbb{P}(H_i) > 0$ dla każdego $i \in I$ (w szczególności, wynika stąd, że zbiór I jest co najwyżej przeliczalny). Wówczas dla dowolnego zdarzenia A zachodzi wzór*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A|H_i)\mathbb{P}(H_i).$$

Dowód. Wynika to wprost z elementarnych własności prawdopodobieństwa oraz definicji prawdopodobieństwa warunkowego. Mianowicie,

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A \cap H_i) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A|H_i)\mathbb{P}(H_i). \quad \square$$

Uwaga 3.1. Założenia powyższego twierdzenia można nieco osłabić: wystarczy zakładać, że zdarzenia $(H_i)_{i \in I}$ są parami prawie rozłaczne i wyczerpują zbiór Ω z dokładnością do zbioru miary 0. Ściślej, załóżmy, że $(H_i)_{i \in I}$ jest przeliczalną rodziną zbiorów o tej własności, że $\mathbb{P}(H_i \cap H_j) = 0$ dla dowolnych i, $j \in I$, $i \neq j$, oraz $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I} H_i\right) = 1$. Wówczas

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i\in I:\mathbb{P}(H_i)>0} \mathbb{P}(A|H_i)\mathbb{P}(H_i).$$

Przykład 3.11. Rzucamy symetryczną monetą aż do momentu, gdy wyrzucimy orła. Następnie, jeśli pierwszy orzeł wypadł w n-tym rzucie, wybieramy losowo liczbę ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosujemy 1?

Rozwiązanie. Ponownie mamy tu do czynienia z doświadczeniem dwuetapowym. Pierwszy etap związany jest z rzucaniem monetą aż do wypadnięcia orła i prowadzi do rozbicia na zdarzenia $H_n = \{\text{pierwszy orzeł wypadł w } n\text{-tym rzucie}\}$, $n = 1, 2, \ldots$. Bezpośrednio z warunków zadania obliczamy, iż $\mathbb{P}(H_n) = 2^{-n}$ oraz $\mathbb{P}(A|H_n) = n^{-1}$. Wobec tego, zastosmy wzór na prawdopodobieństwo całkowite. Zwróćmy tu jednak uwagę, iż musimy posłużyć się wersją z Uwagi 3.1. Zdarzenia H_n są co prawda parami rozłaczne, ale nie wyczerpują całego zbioru Ω: ciąg złożony z samych reszek nie należy do żadnego ze zbiorów H_n. Otrzymujemy

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}}{n} = \log 2,$$

korzystając z rozwinięcia funkcji logarytmicznej w szereg potęgowy. □

Wzór na prawdopodobieństwo całkowite można uogólniać na przypadek gdy doświadczenie składa się z większej liczby etapów.

Przykład 3.12. W urnie I znajdują się dwie prawidłowe monety, a w urnie II - jedna prawidłowa i jedna fałszywa, z dwoma orłami. Losujemy urnę, z urny losujemy monetę, a następnie wylosowaną monetą wykonujemy jeden rzut. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że otrzymamy orła?

Rozwiązanie. Pierwszym etapem jest losowanie urny: niech H_1 oznacza zdarzenie „wylosowano urnę I", H_2 - „wylosowano urnę II". W kolejnym etapie ciągniemy monetę z urny. Niech $B_1 = \{\text{wylosowana moneta jest prawidłowa}\}$, $B_2 = \{\text{wylosowana moneta jest fałszywa}\}$ oraz $A = \{\text{wyrzucono orła}\}$. Mamy

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B_1 \cap H_1) + \mathbb{P}(A \cap B_2 \cap H_1) + \mathbb{P}(A \cap B_1 \cap H_2) + \mathbb{P}(A \cap B_2 \cap H_2)$$

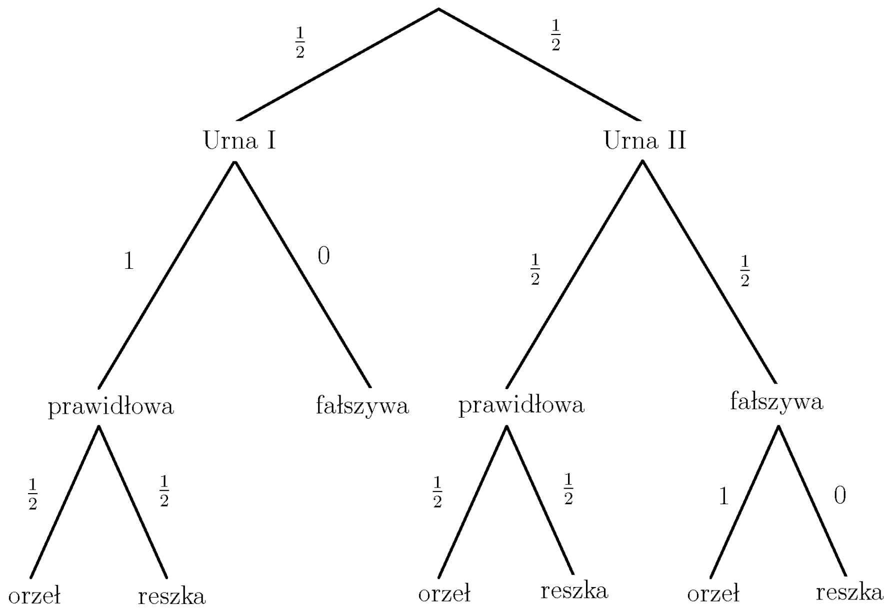
i widzimy, że drugie prawdopodobieństwo po prawej stronie jest równe 0 (w urnie I nie ma fałszywych monet - odpowiednie zdarzenie jest niemożliwe). Wobec tego, po prawej stronie mamy trzy niezerowe składniki; korzystając z Twierdzenia 3.1, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(H_1)\mathbb{P}(B_1|H_1)\mathbb{P}(A|B_1 \cap H_1)\\ &\quad + \mathbb{P}(H_2)\mathbb{P}(B_1|H_2)\mathbb{P}(A|B_1 \cap H_2) + \mathbb{P}(H_2)\mathbb{P}(B_2|H_2)\mathbb{P}(A|B_2 \cap H_2).\end{aligned}$$

Bezpośrednio z treści zadania wnosimy, że $\mathbb{P}(H_1) = 1/2$, $\mathbb{P}(H_2) = 1/2$, $\mathbb{P}(B_1|H_1) = 1$, $\mathbb{P}(B_2|H_1) = 0$, $\mathbb{P}(B_1|H_2) = 1/2$, $\mathbb{P}(A|B_1 \cap H_1) = \mathbb{P}(A|B_1 \cap H_2) = 1/2$ oraz $\mathbb{P}(A|B_2 \cap H_2) = 1$. Wobec tego,

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{5}{8}.$$

W przypadku tego zadania, odpowiednie drzewo jest bardzo pomocne (por. Rysunek 2 poniżej). Widzimy, iż powyższy wynik odpowiada zsumowaniu iloczynów



Rysunek 2. Drzewo ilustrujące Przykład 3.12

dla gałęzi prowadzących do słowa ,,orzeł" na końcu drzewa. Ponadto, ,,wycięliśmy" fragment drzewa zaczynający się od gałęzi o prawdopodobieństwie 0. □

Dalsze przykłady będziemy analizować w połączeniu ze wzorem Bayesa. Wzór ten stosujemy w przypadku gdy znamy wynik doświadczenia wieloetapowego, a pytamy o jego przebieg. Zanim sformułujemy odpowiednie stwierdzenie, rozważmy kontynuację Przykładu 3.10.

Przykład 3.13. W sytuacji opisanej w Przykładzie 3.10, załóżmy, że w drugim losowaniu wyciągnięto kulę białą. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w pierwszym losowaniu wyciągnięto kulę czarną?

Rozwiązanie. Przy oznaczeniach wprowadzonych w rozwiązaniu Przykładu 3.10, interesuje nas prawdopodobieństwo warunkowe $\mathbb{P}(H_2|A)$. Bezpośrednio z definicji, obliczamy, iż

$$\mathbb{P}(H_2|A) = \frac{\mathbb{P}(H_2 \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A|H_2)\mathbb{P}(H_2)}{\mathbb{P}(A|H_1)\mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(A|H_2)\mathbb{P}(H_2)},$$

gdzie w ostatnim przejściu skorzystaliśmy ze wzoru na prawdopodobieństwo warunkowe i prawdopodobieństwo całkowite. Powyższa równość to szczególny przypadek wzoru Bayesa. Wstawiając konkretne wartości (które odczytujemy bezpośrednio z warunków zadania), dostajemy wynik

$$\mathbb{P}(H_2|A) = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}. \qquad \square$$

Twierdzenie 3.3 (Wzór Bayesa)**.** *Przy założeniach Twierdzenia 3.2 oraz $j \in I$, zachodzi równość*

$$\mathbb{P}(H_j|A) = \frac{\mathbb{P}(A|H_j)\mathbb{P}(H_j)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A|H_j)\mathbb{P}(H_j)}{\sum_{i\in I}\mathbb{P}(A|H_i)\mathbb{P}(H_i)}.$$

Uwaga 3.2. Tak jak w Uwadze 3.1, powyższy wzór można zmodyfikować tak, by zachodził dla parami prawie rozłącznych zdarzeń $(H_i)_{i\in I}$, wyczerpujących zbiór Ω z dokładnością do miary 0 (o ile tylko badane zdarzenie H_j ma dodatnie prawdopodobieństwo).

Przykład 3.14. Ze statystycznych danych wiadomo, że 0.04% populacji choruje na chorobę C. W celu zdiagnozowania tej choroby, stosuje się test, wykrywający chorobę u osób chorych z prawdopodobieństwem 90%. Może się zdarzyć, że u osoby zdrowej test da wynik pozytywny - dzieje się tak z prawdopodobieństwem 0.01%.

a) Wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana osoba będzie miała pozytywny wynik testu.

b) Załóżmy, że dana osoba ma pozytywny wynik testu. Wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że wykonując ten test ponownie, uzyska wynik pozytywny.

Rozwiązanie. Widzimy, iż mamy do czynienia z doświadczeniem dwuetapowym. Pierwszym etapem jest wylosowanie osoby do badań: prowadzi on do rozbicia na zdarzenia H_1 - wylosowana osoba jest chora, H_2 - wylosowana osoba nie jest chora. Wprowadźmy zdarzenia A - pierwszy test daje wynik pozytywny, B - drugi test daje wynik pozytywny.

a) Korzystamy ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite: na mocy warunków zadania zachodzą równości $\mathbb{P}(H_1) = 0.04\%$, $\mathbb{P}(H_2) = 99.96\%$, $\mathbb{P}(A|H_1) = 90\%$, $\mathbb{P}(A|H_2) = 0.01\%$, a więc $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|H_1)\mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(A|H_2)\mathbb{P}(H_2) = 0.00045996$.

b) Mamy wyznaczyć $\mathbb{P}(B|A)$. Widać, iż należy ponownie użyć wzoru na prawdopodobieństwo całkowite, tym razem jednak w odniesieniu do prawdopodobieństwa warunkowego. Aby uniknąć niejasności, spróbujmy postąpić jak w dowodzie Twierdzenia 3.2. Prawdopodobieństwo warunkowe, przy ustalonym zdarzeniu warunkującym, jest miarą probabilistyczną, a zatem

$$\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B\cap H_1|A)+\mathbb{P}(B\cap H_2|A) = \mathbb{P}(B|A\cap H_1)\mathbb{P}(H_1|A)+\mathbb{P}(B|A\cap H_2)\mathbb{P}(H_2|A)$$

(ostatnią równość łatwo sprawdzamy, rozpisując wzór na prawdopodobieństwo warunkowe). Widać, że $\mathbb{P}(B|A\cap H_1) = \mathbb{P}(B|H_1) = \mathbb{P}(A|H_1)$ oraz $\mathbb{P}(B|A\cap H_2) = \mathbb{P}(B|H_2) = \mathbb{P}(A|H_2)$: istotnie, informacja o tym, że pierwszy test dał wynik pozytywny/negatywny niczego nie wnosi; istotny jest fakt, czy dana osoba choruje na chorobę C czy nie. Pozostaje wyznaczyć $\mathbb{P}(H_1|A)$ oraz $\mathbb{P}(H_2|A)$. Korzystając ze wzoru Bayesa, mamy

$$\mathbb{P}(H_1|A) = \frac{\mathbb{P}(A|H_1)\mathbb{P}(H_1)}{\mathbb{P}(A)} = 0.7826768,$$

a zatem $\mathbb{P}(H_2|A) = 1 - \mathbb{P}(H_1|A) = 0.2173232$. Wstawiając te liczby wyżej, otrzymujemy, iż $\mathbb{P}(B|A) \simeq 0.7044309$.

Na rozwiązanie podpunktu b) można spojrzeć nieco inaczej. Mianowicie, w celu wyznaczenia prawdopodobieństwa warunkowego B, stosujemy wzór na prawdopodobieństwo całkowite dokładnie tak samo jak w a), tyle że *zmieniają się prawdopodobieństwa* $\mathbb{P}(H_1)$ oraz $\mathbb{P}(H_2)$. W wyjściowej sytuacji dysponowaliśmy tylko danymi statystycznymi, które dały nam równości $\mathbb{P}(H_1) = 0.04\%$ oraz $\mathbb{P}(H_2) = 99.96\%$. W momencie gdy dysponujemy wynikiem pierwszego testu, prawdopodobieństwo tego, że dana osoba jest chora (odp. zdrowa), będzie równe $\mathbb{P}(H_1|A)$ (odp. $\mathbb{P}(H_2|A)$). Zatem, szukane prawdopodobieństwo to

$$0.9 \cdot 0.7826768 + 0.0001 \cdot 0.2173232 \simeq 0.7044309.$$

Na zakończenie, zwróćmy uwagę na ciekawe zjawisko. Gdyby badany w zadaniu test miał większą ,,omylność" w stosunku do osób zdrowych (przykładowo, dawałby wynik pozytywny z prawdopodobieństwem 1% dla osób zdrowych), to mielibyśmy $\mathbb{P}(H_1|A) = 0.03476246$. Z punktu widzenia zastosowań, byłby to wynik katastrofalny: taki test nie daje żadnej informacji o stanie zdrowia badanej osoby. W przypadku rzadkich chorób ważne jest aby tego typu błąd był niewielki: w przeciwnym razie, przypadki pozytywnych wyników odpowiadających osobom chorym są dominowane przez liczne pozytywne wyniki pochodzące od osób zdrowych. □

Wzór Bayesa, po dopowiednim przekształceniu, można stosować także w sytuacji, gdy doświadczenie składa się z większej liczby etapów.

Przykład 3.15 (Kontynuacja Przykładu 3.12)**.** Załóżmy, że wyrzucono orła. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że rzucano prawidłową monetą? Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że moneta pochodziła z urny II?

Rozwiązanie. Stosujemy oznaczenia z Przykładu 3.12. Zajmijmy się najpierw prawdopodobieństwem $\mathbb{P}(H_2|A)$. Mamy, korzystając ze wzoru Bayesa oraz wzoru na prawdopodobieństwo całkowite,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(H_2|A) &= \frac{\mathbb{P}(A|H_2)\mathbb{P}(H_2)}{\mathbb{P}(A)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(A|B_1\cap H_2)\mathbb{P}(B_1|H_2)\mathbb{P}(H_2) + \mathbb{P}(A|B_2\cap H_2)\mathbb{P}(B_2|H_2)\mathbb{P}(H_2)}{\mathbb{P}(A)} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{5}{8}} = \frac{3}{5}.
\end{aligned}$$

W przypadku $\mathbb{P}(B_1|H_2)$ rozumowanie jest analogiczne. Mamy

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B_1|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1)}{\mathbb{P}(A)} &= \frac{\mathbb{P}(A|B_1)\big[\mathbb{P}(B_1|H_1)\mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(B_1|H_2)\mathbb{P}(H_2)\big]}{\mathbb{P}(A)} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\big(1\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\big)}{\frac{5}{8}} = \frac{3}{5}.
\end{aligned}$$

□

3.3. **Niezależność zdarzeń.** Jak łatwo zauważyć, analizując powyższe przykłady, jeśli A, B są zdarzeniami takimi, że $\mathbb{P}(B) > 0$, to na ogół prawdopodobieństwo warunkowe $\mathbb{P}(A|B)$ różni się od prawdopodobieństwa bezwarunkowego $\mathbb{P}(A)$. Innymi słowy, dodatkowa informacja podana za pomocą zdarzenia B w istotny sposób zmienia szansę zajścia zdarzenia A. Czasami jednak to, czy zdarzenie B zaszło czy nie, nie wpływa na prawdopodobieństwo A: $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$. W takiej sytuacji mówimy, że A i B są niezależne. Jak łatwo sprawdzić, rozpisując wzór na prawdopodobieństwo warunkowe, powyższa równość daje się zapisać w równoważnej postaci $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$, która ma tę zaletę, iż pozwala uwolnić się od założenia $\mathbb{P}(B) > 0$. Sformułujmy definicję.

Definicja 3.3. Załóżmy, że $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ jest przestrzenią probabilistyczną oraz A, $B \in \mathcal{F}$. Mówimy, że A i B są *niezależne*, jeśli

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Jeśli powyższa równość nie zachodzi, to mówimy, że A i B są *zależne*.

Przykład 3.16. Z talii 52 kart losujemy kartę. Rozważmy zdarzenia A - wylosowana karta jest królem, B - wylosowana karta jest kierem. Wówczas zdarzenia A, B są niezależne: istotnie, biorąc standardową przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, obliczamy, iż $\mathbb{P}(A) = 4/52$, $\mathbb{P}(B) = 13/52 = 1/4$ oraz $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/52$.

Przykład 3.17. Rzucamy dwa razy kostką. Zbadajmy niezależność zdarzeń A - suma oczek wynosi 6 oraz B - za pierwszym razem wyrzucono czwórkę. Przyjmując standardową definicję $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, widzimy, iż $A = \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}$, skąd $\mathbb{P}(A) = 5/36$; ponadto, łatwo obliczyć, że $\mathbb{P}(B) = 1/6$. Z drugiej strony, $A \cap B = \{(4,2)\}$, skąd $\mathbb{P}(A \cap B) \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. Zdarzenia A i B nie są więc niezależne. Intuicyjnie, wynik ten jest całkowicie jasny: jeśli w pierwszym rzucie otrzymano czwórkę, wciąż zachowujemy szansę na uzyskanie w sumie sześciu oczek - będzie to miało miejsce jeśli w drugim rzucie otrzymamy dwa oczka. Z drugiej strony, jeśli w pierwszym rzucie wypadnie szóstka, to zdarzenie B nie może zajść. Innymi słowy, szansa uzyskania łącznie sześciu oczek zależy od wyniku pierwszego rzutu, co uniemożliwia niezależność zdarzeń A i B.

Spójrzmy teraz na pokrewny problem, w którym zdarzenie A to „suma oczek wynosi 7". Wówczas bezpośrednio liczymy, że $\mathbb{P}(A) = 1/6$ oraz $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/36$, a więc A i B są niezależne. Intuicyjnie, wynika to stąd, że zdarzenie A nie zależy od liczby oczek w pierwszym rzucie: bez względu na to, co uzyskamy, zawsze satysfakcjonuje nas tylko jeden z sześciu wyników drugiego rzutu.

Przykład 3.18. Losujemy dwie liczby X oraz Y z odcinka $[0,1]$. Zbadać niezależność zdarzeń $A = \{\text{obie liczby są mniejsze niż } 1/2\}$ oraz $B = \{\text{liczba } X \text{ jest mniejsza niż } Y\}$.

Rozwiązanie. Mamy $\Omega = [0,1]^2$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\Omega)$ oraz $\mathbb{P}$ jest prawdopodobieństwem geometrycznym. Jak łatwo widać, mamy $A = [0,1/2)^2$, skąd $\mathbb{P}(A) = 1/4$; ponadto, $B = \{(x,y) \in \Omega : x < y\}$ skąd $\mathbb{P}(B) = 1/2$. Wreszcie, $A \cap B = \{(x,y) \in [0,1/2) : x < y\}$, a więc $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/8 = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$, a więc zdarzenia A i B są niezależne. □

Przykład 3.19. Zastanówmy się teraz nad pojęciem niezależności trzech zdarzeń. Jak wyżej, rozważmy dwukrotny rzut kostką i określmy zdarzenia A - suma oczek wynosi 7, B - w pierwszym rzucie uzyskano czwórkę, C - w drugim rzucie uzyskano trójkę. Jak wiemy, zachodzą równości $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 1/6$; ponadto, łatwo policzyć, że także $\mathbb{P}(C) = 1/6$. Zauważmy, że $A \cap B = B \cap C = C \cap A = \{\text{w pierwszym rzucie czwórka, w drugim trójka}\}$, skąd $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(C \cap A) = 1/36$. Widzimy więc, że każde dwa zdarzenia spośród A, B, C są niezależne. Z drugiej strony, wprost z zawierania $B \cap C = C \cap A \subset A$, widzimy, że zdarzenia A, B, C *nie są niezależne*. Powyższe rozważania pokazują, iż niezależność zdarzeń nie może opierać się tylko na relacjach w obrębie par, ale powinna w jakiś sposób odnosić się do łącznego, „zespołowego" zachowania się zdarzeń. W szczególności, jeśli zdarzenia A, B, C, D, $\ldots$ są niezależne, to zdarzenia $A \cap B$, C, D, $\ldots$ też powinny mieć tę własność. Prowadzi to do następujących dwóch definicji.

Definicja 3.4. Załóżmy, że $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ jest przestrzenią probabilistyczną oraz $(A_i)_{i \in I}$ jest pewną rodziną zdarzeń.

1. Mówimy, że zdarzenia $(A_i)_{i\in I}$ są *niezależne parami*, jeśli dla dowolnych i, $j \in I$, $i \neq j$, zachodzi równość

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j).$$

2. Mówimy, że zdarzenia $(A_i)_{i\in I}$ są *niezależne* (lub *niezależne łącznie*, bądź *niezależne zespołowo*), jeśli dla dowolnego różnowartościowego skończonego ciągu i_1, i_2, …, i_k o wyrazach w I zachodzi równość

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1})\mathbb{P}(A_{i_2})\ldots\mathbb{P}(A_{i_k}).$$

Przykładowo, zdarzenia A, B, C są niezależne, jeśli zachodzą cztery równości: $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$, $\mathbb{P}(C \cap A) = \mathbb{P}(C)\mathbb{P}(A)$ oraz $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$. Gdy mamy do czynienia z n zdarzeniami A_1, A_2, …, A_n, musimy sprawdzić łącznie $2^n - n - 1$ warunki; żadnego z nich nie można pominąć.

Uwaga 3.3. Zdarzenia niezależne mają następującą naturalną własność. Załóżmy, że $(A_i)_{i\in I}$ jest rodziną zdarzeń niezależnych oraz I_1, I_2, …, I_n są rozłącznymi podzbiorami zbioru I. Następnie wykonajmy pewną operację na zbiorach z klasy $(A_i)_{i\in I_1}$, prowadzącą do zdarzenia B_1; wykonajmy pewne teoriomnogościowe operacje na elementach $(A_i)_{i\in I_2}$, i ich efekt oznaczmy przez B_2, itd. Wówczas zdarzenia B_1, B_2, …, B_n są niezależne. Przykładowo, jeśli zdarzenia A_1, A_2, …, A_{10} są niezależne, to zdarzenia $B_1 = A_1 \cup A_2$, $B_2 = (A_3 \cap A_4) \setminus A_7$ oraz $B_3 = A_5 \cup (A_6 \setminus A_9)$ są niezależne, gdyż wyrażają się za pomocą różnych zdarzeń.

Przykład 3.20. W urnie znajduje się pięć kul białych, ponumerowanych liczbami od 1 do 5, cztery kule czarne, ponumerowane liczbami od 1 do 4, trzy kule niebieskie, ponumerowane liczbami od 1 do 3 oraz dwie zielone, z liczbami 1 oraz 2. Losujemy po jednej kuli ze zwracaniem aż do momentu wylosowania kul wszystkich kolorów. Niech B, C, N, Z oznaczają zdarzenia, że na pierwszej wylosowanej kuli o kolorze białym, czarnym, niebieskim bądź zielonym, odpowiednio, była liczba 1. Zbadać niezależność tych zdarzeń.

Rozwiązanie. Będziemy badać niezależność bezpośrednio z definicji. Najlepiej zilustrować rozumowanie analizując konkretny przykład. Wykażemy, że

$$\mathbb{P}(B \cap N \cap Z) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(N)\mathbb{P}(Z).$$

W tym celu, zauważmy, że $\mathbb{P}(B) = 1/5$, z symetrii: każda z liczb 1, 2, …, 5 ma tę samą szansę na pojawienie się na pierwszej białej kuli. Analogicznie, zachodzą równości $\mathbb{P}(N) = 1/3$ oraz $\mathbb{P}(Z) = 1/2$, a więc $\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(N)\mathbb{P}(Z) = 1/30$. Rozumowanie dla $\mathbb{P}(B \cap N \cap Z)$ jest bardzo podobne. Każda trójka liczb (i, j, k), gdzie $i \in \{1, 2, \ldots, 5\}$, $j \in \{1, 2, 3\}$ oraz $k \in \{1, 2\}$, ma tę samą szansę na pojawienie na kuli białej, niebieskiej i zielonej, odpowiednio. Wnioskujemy stąd, że $\mathbb{P}(B \cap N \cap Z) = 1/30$.

Wszystkie pozostałe równości (wymagane by zakończyć dowód niezależności zdarzeń) wykazujemy w dokładnie ten sam sposób. □

Przykład 3.21. Załóżmy, że $p_1 < p_2 < \ldots < p_N$ są ustalonymi liczbami pierwszymi. Ze zbioru $\{1, 2, \ldots, p_1p_2\ldots p_N\}$ losujemy liczbę. Niech A_{p_k} oznacza zdarzenie „wylosowana liczba dzieli się przez p_k”. Wykazać niezależność zdarzeń A_{p_1}, A_{p_2}, …, A_{p_N}.

Rozwiązanie. Rzecz jasna, mamy $\Omega = \{1, 2, \ldots, p_1p_2\ldots p_N\}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$ i $\mathbb{P}$ jest prawdopodobieństwem klasycznym. Ustalmy dowolny rosnący ciąg $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq N$. Musimy udowodnić równość

$$\mathbb{P}(A_{p_{i_1}} \cap A_{p_{i_2}} \cap \ldots \cap A_{p_{i_k}}) = \mathbb{P}(A_{p_{i_1}})\mathbb{P}(A_{p_{i_2}})\ldots\mathbb{P}(A_{p_{i_k}}).$$

W tym celu, zauważmy, że

$$A_{p_m} = \{p_m, 2p_m, 3p_m, \ldots, p_1p_2\ldots, p_N\},$$

skąd $|A_{p_m}| = p_1p_2\ldots p_{m-1}p_{m+1}\ldots p_N$ i $\mathbb{P}(A_{p_m}) = 1/p_m$. Analogicznie,

$$A_{p_{i_1}} \cap A_{p_{i_2}} \cap \ldots \cap A_{p_{i_k}} = \{p_{i_1}p_{i_2}\ldots p_{i_k}, 2p_{i_1}p_{i_2}\ldots p_{i_k}, \ldots, p_1p_2\ldots p_N\},$$

a więc $|A_{p_{i_1}} \cap A_{p_{i_2}} \cap \ldots \cap A_{p_{i_k}}| = p_1p_2\ldots p_N/p_{i_1}p_{i_2}\ldots p_{i_k}$ oraz

$$\mathbb{P}(A_{p_{i_1}} \cap A_{p_{i_2}} \cap \ldots \cap A_{p_{i_k}}) = \frac{1}{p_{i_1}p_{i_2}\ldots p_{i_k}} = \mathbb{P}(A_{p_{i_1}})\mathbb{P}(A_{p_{i_2}})\ldots\mathbb{P}(A_{p_{i_k}}). \quad \square$$

Niekiedy warto badać niezależność zdarzeń przy użyciu pewnego równoważnego warunku. Przyjmijmy następującą konwencję: jeśli $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ oraz A jest zdarzeniem, to przyjmiemy

$$A^\varepsilon = \begin{cases} A & \text{jeśli } \varepsilon = 1, \\ A' & \text{jeśli } \varepsilon = -1. \end{cases}$$

Twierdzenie 3.4. *Zdarzenia A_1, A_2, …, A_n są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego ciągu $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ znaków,*

$$\mathbb{P}(A_1^{\varepsilon_1} \cap A_2^{\varepsilon_2} \cap \ldots \cap A_n^{\varepsilon_n}) = \mathbb{P}(A_1^{\varepsilon_1})\mathbb{P}(A_2^{\varepsilon_2})\ldots\mathbb{P}(A_n^{\varepsilon_n}).$$

Dowód. $\Rightarrow$ Wystarczy dowieść, że jeśli A_1, A_2, …, A_n są niezależne, to A_1, A_2, …, A_{n-1}, A_n' są niezależne. Wówczas, przez kilkakrotne zastosowanie tego faktu, otrzymamy niezależność zdarzeń $A_1^{\varepsilon_1}$, $A_2^{\varepsilon_2}$, …, $A_n^{\varepsilon_n}$, a stąd wyniknie żądana równość. Aby zbadać niezależność A_1, A_2,…, A_n', bierzemy dowolny ciąg $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$; jeśli $i_k \neq n$, to równość z definicji niezależności zachodzi, z założenia (A_1, A_2, …, A_n są niezależne). Jeśli zaś $i_k = n$, to

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_{k-1}} \cap A_n') \\
&= \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_{k-1}}) - \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_{k-1}} \cap A_n) \\
&= \mathbb{P}(A_{i_1})\mathbb{P}(A_{i_2})\ldots\mathbb{P}(A_{i_{k-1}}) - \mathbb{P}(A_{i_1})\mathbb{P}(A_{i_2})\ldots\mathbb{P}(A_{i_{k-1}})\mathbb{P}(A_n) \\
&= \mathbb{P}(A_{i_1})\mathbb{P}(A_{i_2})\ldots\mathbb{P}(A_{i_{k-1}})\mathbb{P}(A_n').
\end{aligned}$$

$\Leftarrow$ Ustalmy $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$. Mamy

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \sum \mathbb{P}(A_1^{\varepsilon_1} \cap A_2^{\varepsilon_2} \cap \ldots A_n^{\varepsilon_n}),$$

gdzie $\varepsilon_{i_1} = \varepsilon_{i_2} = \ldots = \varepsilon_{i_k} = 1$, a sumowanie jest rozciągnięte po wszystkich możliwych wartościach dla pozostałych znaków ε_j. Podobnie,

$$\mathbb{P}(A_{i_1})\mathbb{P}(A_{i_2})\ldots\mathbb{P}(A_{i_k}) = \sum \mathbb{P}(A_1^{\varepsilon_1})\mathbb{P}(A_2^{\varepsilon_2})\ldots\mathbb{P}(A_n^{\varepsilon_n}).$$

Ponieważ odpowiednie składniki w sumach są takie same, otrzymujemy żądaną równość. $\square$

Przykład 3.22. Rzucono 50 razy prawidłową monetą. Dla $i = 1, 2, \ldots, 50$, rozważmy zdarzenie $A_i = \{$w i-tym rzucie wypadł orzeł$\}$; ponadto, niech $A_{51} = \{$wypadła łącznie parzysta liczba orłów$\}$. Wykazać, że dowolne 50 spośród zdarzeń A_1, A_2, …, A_{51} to zdarzenia niezależne. Czy A_1, A_2, …, A_{51} są niezależne?

Rozwiązanie. Zacznijmy od drugiego pytania. Rzecz jasna, zdarzenia A_1, A_2, ..., A_{51} nie są niezależne; jeśli wiemy, że zaszły A_1, A_2, ..., A_{50}, to automatycznie musiało też zajść A_{51}. Formalnie, mamy $\Omega = \{(a_1, a_2, \ldots, a_{50}) : a_i \in \{O, R\}\}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$ i $\mathbb{P}$ jest prawdopodobieństwem klasycznym. Bezpośrednio obliczamy, że $\mathbb{P}(A_i) = 1/2$ dla wszystkich $i \in \{1, 2, \ldots, 51\}$ i widzimy, iż

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{51}) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{50}) = \frac{1}{2^{50}} \neq \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\ldots\mathbb{P}(A_{51}).$$

Wykażemy teraz, że dowolne 50 zdarzeń spośród A_1, A_2, ..., A_{51} jest niezależnych, wykorzystując powyższy równoważny warunek. Łatwo widać, że zdarzenia A_1, A_2, ..., A_{50} są niezależne: istotnie, dla dowolnego ciągu ε_1, ε_2, ..., ε_{50},

$$\mathbb{P}(A_1^{\varepsilon_1} \cap A_2^{\varepsilon_2} \cap \ldots \cap A_{50}^{\varepsilon_{50}}) = \frac{1}{2^{50}}.$$

Wybierzmy teraz ciąg $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_{50} = 51$; w ciągu tym pojawiają się wszystkie liczby ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 50\}$, za wyjątkiem jednej: oznaczmy ją przez j. Ustalmy ciąg ε_1, ε_2, ..., ε_{50} i spójrzmy na zdarzenie

$$A_{i_1}^{\varepsilon_1} \cap A_{i_2}^{\varepsilon_2} \cap \ldots \cap A_{i_{50}}^{\varepsilon_{50}}.$$

Zdarzenia $A_{i_1}^{\varepsilon_1}$, $A_{i_2}^{\varepsilon_2}$, ..., $A_{i_{49}}^{\varepsilon_{49}}$ determinują wyniki we wszystkich rzutach, za wyjątkiem j-tego. Ostatnie zdarzenie, $A_{51}^{\varepsilon_{50}}$, mówi o parzystości łącznej liczby wyrzuconych orłów, a więc *determinuje wynik w j-tym rzucie.* Wobec tego,

$$\mathbb{P}(A_{i_1}^{\varepsilon_1} \cap A_{i_2}^{\varepsilon_2} \cap \ldots \cap A_{i_{50}}^{\varepsilon_{50}}) = \frac{1}{2^{50}} = \mathbb{P}(A_{i_1}^{\varepsilon_1})\mathbb{P}(A_{i_2}^{\varepsilon_2})\ldots\mathbb{P}(A_{i_{50}}^{\varepsilon_{50}}).$$

Kończy to dowód niezależności. □

Przykład 3.23. Wykonujemy ciąg podwójnych rzutów prawidłową kostką; w każdym podwójnym rzucie sumujemy uzyskane dwie liczby oczek. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że 5 pojawi się przed 7?

Rozwiązanie. Oznaczmy interesujące nas zdarzenie przez A. Ponadto, dla $n = 1, 2, \ldots$, wprowadźmy $A_n = \{$w pierwszych $n-1$ podwójnych rzutach ani razu nie uzyskaliśmy sumy 5 ani sumy 7, w n-tym losowaniu suma oczek wyniosła 5$\}$. Wówczas zdarzenia A_1, A_2, ... są parami rozłączne i A jest ich sumą. Wobec tego, korzystając z własności prawdopodobieństwa, mamy

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Zajmijmy się teraz pojedynczym składnikiem powyższej sumy. Wyniki otrzymane w różnych rzutach są niezależne. Stąd

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_n) = \ & \mathbb{P}(\text{w pierwszym podwójnym rzucie suma oczek jest różna od 5 i 7}) \times \\
& \mathbb{P}(\text{w drugim podwójnym rzucie suma oczek jest różna od 5 i 7}) \times \\
& \ldots \\
& \mathbb{P}(\text{w } n-1\text{-szym podwójnym rzucie suma oczek jest różna od 5 i 7}) \times \\
& \mathbb{P}(\text{w } n\text{-tym podwójnym rzucie suma oczek wynosi 5}) \\
= \ & \left(\frac{26}{36}\right)^{n-1} \cdot \frac{4}{36},
\end{aligned}$$

a zatem
$$\mathbb{P}(A)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{26}{36}\right)^{n-1}\frac{4}{36}=\frac{2}{5}.$$

Wynik ten można także otrzymać przy użyciu wzoru na prawdopodobieństwo całkowite. Wprowadźmy zdarzenia B - w pierwszym podwójnym rzucie suma oczek wynosi 5, C - w pierwszym podwójnym rzucie suma oczek wynosi 7, $D=\Omega\setminus(B\cup C)$. Wówczas
$$\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(A|C)\mathbb{P}(C)+\mathbb{P}(A|D)\mathbb{P}(D).$$
Zauważmy, iż zachodzą warunki
$$\mathbb{P}(A|B)=1,\quad \mathbb{P}(A|C)=0\quad\text{oraz}\quad \mathbb{P}(A|D)=\mathbb{P}(A).$$
Dwie pierwsze równości są oczywiste. Ostatnia bierze się stąd, iż jeśli zaszło D, to po pierwszym podwójnym rzucie jesteśmy w takiej samej sytuacji jak na początku (pierwszy rzut niczego nie wnosi). Łącząc powyższe tożsamości, otrzymujemy zatem
$$\mathbb{P}(A)=\frac{\mathbb{P}(B)}{1-\mathbb{P}(D)}=\frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(C)}=\frac{\frac{4}{36}}{\frac{4}{36}+\frac{6}{36}}=\frac{2}{5}.$$
Powyższa równość zachodzi w następującej ogólnej sytuacji. Jeśli B, C są rozłącznymi zbiorami zawierającymi pewne wyniki ustalonego doświadczenia losowego, to przy nieskończonym, niezależnym powtórzeniu tego doświadczenia, prawdopodobieństwo tego, że zdarzenie B zajdzie wcześniej niż C, wynosi
$$\frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(C)}. \qquad \square$$

3.4. **Błądzenie losowe po liczbach całkowitych.** Rozważmy następujące doświadczenie losowe. Niech p będzie ustaloną liczbą z przedziału $[0,1]$. Po liczbach całkowitych porusza się pionek, w każdym kroku poruszając się do jednej z sąsiednich liczb całkowitych: do większej z prawdopodobieństwem p, do mniejszej z prawdopodobieństwem $1-p$. Doświadczenie to formułuje się w ,,otoczce" hazardowej: załóżmy, że gracz gra w orła i reszkę monetą, dla której prawdopodobieństwo wypadnięcia orła wynosi p. To znaczy, wykonuje ciąg niezależnych rzutów monetą; jeśli wypadnie orzeł, wygrywa 1 zł; w przeciwnym razie, traci 1 zł. Wówczas, zamiast mówić o położeniu pionka, możemy równoważnie mówić o zysku gracza A. Rozważymy kilka naturalnych pytań, które pojawiają się w tym kontekście.

Przykład 3.24. Załóżmy, że $M<0<N$ są ustalonymi liczbami całkowitymi. Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia $A=\{$pionek dojdzie do punktu M wcześniej niż do punktu $N\}$?

Rozwiązanie. Rozważmy nieco ogólniejszą sytuację. Dla $j\in\{M,M+1,\ldots,N\}$, niech p_j oznacza prawdopodobieństwo tego, że pionek dojdzie do punktu M wcześniej niż do N, przy założeniu, że startuje z punktu j. Od razu widzimy, że zachodzą równości $p_M=1$ oraz $p_N=0$. Ponadto, ciąg (p_j) spełnia pewną rekurencję. Mianowicie, załóżmy, że pionek startuje z punktu $j\in\{M+1,M+2,\ldots,N-1\}$ i wprowadźmy zdarzenia H_1 - w pierwszym ruchu pionek idzie w prawo, H_2 - w pierwszym ruchu pionek idzie w lewo. Wówczas, ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite,
$$p_j=\mathbb{P}(A|H_1)\mathbb{P}(H_1)+\mathbb{P}(A|H_2)\mathbb{P}(H_2)=\mathbb{P}(A|H_1)p+\mathbb{P}(A|H_2)(1-p).$$

Spójrzmy teraz na prawdopodobieństwo warunkowe $\mathbb{P}(A|H_1)$. Wiemy, że pionek startował z punktu j oraz w pierwszym kroku przesunął się w prawo: wobec tego po pierwszym ruchu, znajduje się w punkcie $j+1$, i z punktu widzenia badania zdarzenia A, możemy traktować sytuację jak gdyby pionek startował z punktu $j+1$. Innymi słowy, zachodzi równość $\mathbb{P}(A|H_1) = p_{j+1}$. Analogiczny argument prowadzi do wniosku $\mathbb{P}(A|H_2) = p_{j-1}$, co w połączeniu z powyższą równością daje rekurencję

$$p_j = pp_{j+1} + (1-p)p_{j-1}.$$

Jest to standardowa rekurencja rzędu 2 i rozwiązujemy ją, szukając najpierw rozwiązań postaci $p_j = r^j$, gdzie r jest ustaloną liczbą rzeczywistą. Wstawiamy tę postać do rekurencji, otrzymując równanie kwadratowe $pr^2 - r + (1-p) = 0$. W przypadku gdy $p \neq 1/2$, posiada ono dwa różne rozwiązania $r_1 = 1$, $r_2 = (1-p)/p$. Następnym krok polega na poszukiwaniu wzoru na p_j postaci

$$p_j = \alpha r_1^j + \beta r_2^j = \alpha + \beta \left(\frac{1-p}{p}\right)^j,$$

gdzie α, β są pewnymi nieznanymi parametrami. Wyznaczamy te parametry korzystając ze wzorów $p_M = 1$, $p_N = 0$, otrzymując

$$\alpha = -\frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^N}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^M - \left(\frac{1-p}{p}\right)^N}, \qquad \beta = \frac{1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^M - \left(\frac{1-p}{p}\right)^N}$$

i ostatecznie

$$p_j = \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^j - \left(\frac{1-p}{p}\right)^N}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^M - \left(\frac{1-p}{p}\right)^N}.$$

W przypadku, gdy $p = 1/2$, rozważane wyżej równanie kwadratowe na r posiada pierwiastek podwójny, a więc poszukujemy rozwiązania postaci

$$p_j = \alpha j + \beta,$$

dla pewnych α, $\beta \in \mathbb{R}$. Po uwzględnieniu warunków $p_M = 1$, $p_N = 0$, otrzymujemy odpowiedź

$$p_j = \frac{j-N}{M-N}. \quad \square$$

Uwaga 3.4. Rozumując analogicznie, możemy wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że pionek dojdzie do punktu N przed dotarciem do punktu M. Zakładając, że pionek startuje z punktu $j \in \{M, M+1, \ldots, N\}$ i oznaczając odpowiednie prawdopodobieństwo przez q_j, otrzymujemy

$$q_j = \begin{cases} \dfrac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^M - \left(\frac{1-p}{p}\right)^j}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^M - \left(\frac{1-p}{p}\right)^N} & \text{jeśli } p \neq 1/2, \\[2ex] \dfrac{M-j}{M-N} & \text{jeśli } p = 1/2. \end{cases}$$

Widzimy więc, że $p_j + q_j = 1$, a więc z prawdopodobieństwem 1 pionek trafi kiedyś do punktu M bądź do punktu N. Innymi słowy, uzyskaliśmy, iż prawdopodobieństwo, że pionek będzie się w nieskończoność poruszał między $M+1$ a $N-1$, wynosi 0 (wynika to też wprost z lematu Borela-Cantelli, ale tego faktu nie będziemy tu omawiać).

Przykład 3.25. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że pionek dojdzie kiedyś do ustalonej liczby $N > 0$?

Rozwiązanie. Korzystamy z poprzednich obliczeń. Dla ustalonej liczby całkowitej $M < 0$, rozważmy zdarzenie

$$A_M = \{\text{pionek dotrze do } N \text{ wcześniej niż do } M\}.$$

Zwróćmy uwagę, iż $A_{-1} \subset A_{-2} \subset A_{-3} \subset \ldots$; ponadto, zdarzenie które nas interesuje, to $\bigcup_{M<0} A_M$ (istotnie: jeśli pionek dociera w pewnym do punktu N, to w szczególności, nie odwiedza wcześniej pewnej liczby ujemnej). Korzystając z twierdzenia o ciągłości, mamy

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{M<0} A_M\right) = \lim_{M\to-\infty} \mathbb{P}(A_M) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } p \geq 1/2, \\ \left(\dfrac{p}{1-p}\right)^N & \text{jeśli } p < 1/2. \end{cases} \quad \square$$

Przykład 3.26. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że pionek dojdzie do liczby 100 lub -100 przed powrotem do punktu 0?

Rozwiązanie. Oznaczmy interesujące nas zdarzenie przez A i niech H_1 - w pierwszym ruchu pionek idzie w prawo, H_2 - w pierwszym ruchu pionek idzie w lewo. Korzystamy ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite: mamy

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|H_1)\mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(A|H_2)\mathbb{P}(H_2) = \mathbb{P}(A|H_1)p + \mathbb{P}(A|H_2)(1-p).$$

Zwróćmy uwagę, iż $\mathbb{P}(A|H_1)$ to prawdopodobieństwo, że startując z 1, pionek dojdzie do 100 przed dojściem do 0; podobnie, $\mathbb{P}(A|H_2)$ to prawdopodobieństwo tego, że startując z -1, pionek dojdzie do -100 przed dojściem do 0. Wobec tego, korzystając z powyższych rozważań, otrzymujemy

$$\mathbb{P}(A) = p\frac{1 - \frac{1-p}{p}}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{100}} + (1-p)\frac{\frac{1-p}{p} - 1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{-100} - 1} = \frac{(2p-1)\left(1 + \left(\frac{1-p}{p}\right)^{100}\right)}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{100}}. \quad \square$$

3.5. **Schemat Bernoulliego.** Przejdźmy do pewnego ważnego przykładu doświadczenia losowego.

Definicja 3.5 (Schemat Bernoulliego)**.** Próbą Bernoulliego nazywamy doświadczenie, w którym możliwe są wyłącznie dwa wyniki; jeden z nich interpretujemy jako sukces, drugi jako porażkę. Schematem Bernoulliego nazywamy ciąg niezależnych powtórzeń tej samej próby Bernoulliego.

W celu formalnego zadania schematu Bernoulliego, przypuśćmy najpierw, że liczba prób jest skończona i wynosi n. Wówczas bierzemy $\Omega = \{0,1\}^n$ (utożsamiamy ciąg porażek/sukcesów z odpowiadającym ciągiem zero-jedynkowym), $\mathcal{F} = 2^\Omega$, a jako prawdopodobieństwo $\mathbb{P}$ bierzemy miarę jednoznacznie zadaną przez warunek

$$\mathbb{P}(\{(a_1, a_2, \ldots, a_n)\}) = p^k(1-p)^{n-k},$$

gdzie k oznacza liczbę jedynek w ciągu $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. W przypadku gdy liczba prób jest nieskończona, jako przestrzeń probabilistyczną należy wziąć nieskończony produkt przestrzeni $(\{0,1\}, 2^{\{0,1\}}, (1-p)\delta_0 + p\delta_1)$.

Załóżmy, że schemat składa się z n prób Bernoulliego. Wówczas prawdopodobieństwo zdarzenia $A = \{$uzyskamy dokładnie k sukcesów$\}$, wynosi

$$\mathbb{P}(A) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Istotnie: zdarzenie A składa się z $\binom{n}{k}$ ciągów zero-jedynkowych zawierających dokładnie k jedynek; każdy taki ciąg, zgodnie z powyższą definicją, ma prawdopodobieństwo $p^k(1-p)^{n-k}$. Stąd powyższa równość.

Przykład 3.27. Z kwadratu $ABCD$ o polu 1 losujemy 20 punktów. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że dokładnie 7 z nich będzie odległych od punktu A o mniej niż 1?

Rozwiązanie. Powyższe doświadczenie łatwo wyrazić przez schemat Bernoulliego. Pojedynczą próbą jest wylosowanie punktu z kwadratu, jako sukces bierzemy zdarzenie, że odległość wylosowanego punktu od A jest mniejsza niż 1. Korzystając z prawdopodobieństwa geometrycznego, widzimy, iż prawdopodobieństwo sukcesu wynosi $p = \pi/4$. Wobec tego, szukane w zadaniu prawdopodobieństwo wynosi

$$\binom{20}{7}\left(\frac{\pi}{4}\right)^7\left(1-\frac{\pi}{4}\right)^{13} \approx 0.00002926022. \quad \square$$

Przykład 3.28. Na egzaminie student losuje kartkę z czterema pytaniami, testującymi w sposób niezależny jego wiedzę z czterech dziedzin. Prawdopodobieństwo tego, że zna on odpowiedź na ustalone pytanie, wynosi $3/4$. Student zdaje egzamin, jeśli zna odpowiedź na co najmniej trzy z zadanych pytań.

a) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wybrany student zda egzamin?

b) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że spośród wybranych 10 studentów, co najmniej dwóch zda egzamin?

Rozwiązanie. a) Mamy do czynienia ze schematem czterech prób Bernoulliego: j-ta próba odpowiada za j-te pytanie, jako sukces przyjmujemy zdarzenie, że student zna odpowiedź na to pytanie. Student zdaje egzamin jeśli liczba sukcesów wynosi 3 lub 4, skąd szukane w zadaniu prawdopodobieństwo wynosi

$$\binom{4}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^1 + \binom{4}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^4\left(\frac{1}{4}\right)^0 = 0.7382812.$$

b) Ponownie mamy do czynienia ze schematem Bernoulliego, tym razem składającym się z dziesięciu prób; j-ta próba odpowiada za wynik j-tego studenta, jako sukces przyjmujemy, iż student ten zdaje egzamin. Na mocy poprzedniego podpunktu, prawdopodobieństwo sukcesu wynosi $p = 0.7382812$. Interesuje nas prawdopodobieństwo tego, że w opisanym schemacie uzyskamy co najmniej dwa sukcesy; wykorzystując odpowiednie zdarzenie przeciwne, obliczamy, iż szukane prawdopodobieństwo wynosi

$$1 - \binom{10}{0}(0.7382812)^0(0.2617188)^{10} - \binom{10}{1}(0.7382812)^1(0.2617188)^9 = 0.999956.$$

$\square$

Przykład 3.29. Rzucamy monetą, dla której prawdopodobieństwo wypadnięcia orła wynosi p, aż do momentu uzyskania 100 orłów (łącznie, niekoniecznie pod rząd).

a) Wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że rzucono dokładnie 1000 razy.
b) Jaka liczba rzutów jest najbardziej prawdopodobna?

Rozwiązanie. a) Skoro rzucono dokładnie 1000 razy, oznacza to, że w 999 rzutach uzyskano dokładnie 99 orłów oraz w ostatnim, tysięcznym rzucie wyrzucono orła. Ponieważ pojedyncze rzuty monetą są wykonywane w sposób niezależny, prawdopodobieństwo szukane w zadaniu jest równe

$$\binom{999}{99}p^{99}(1-p)^{900}\cdot p=\binom{999}{99}p^{100}(1-p)^{900}.$$

b) Rozumując podobnie jak w a), wnioskujemy, iż prawdopodobieństwo wykonania dokładnie k rzutów wynosi

$$p_k=\binom{k-1}{99}p^{100}(1-p)^{k-100}.$$

Interesuje nas ta liczba k, dla której prawdopodobieństwo p_k jest największe. Aby wyznaczyć tę liczbę, spójrzmy na iloraz dwóch kolejnych wyrazów p_k oraz p_{k+1}:

$$\frac{p_{k+1}}{p_k}=\frac{k(1-p)}{k-99}.$$

Iloraz ten jest większy niż jeden wtedy i tylko wtedy, gdy $k<99/p$; dla k większych niż $99/p$, iloraz jest mniejszy niż 1. Co więcej, jeśli $99/p$ jest liczbą całkowitą, to iloraz p_{k+1}/p_k jest równy 1 dla k będącego tą liczbą. Otrzymujemy stąd następujący opis zachowania ciągu $(p_k)_{k\geq 99}$: dla kilku początkowych wartości k, wyrazy p_k rosną, a następnie zaczynają maleć (ponadto, gdy $99/p$ jest całkowite, ciąg przyjmuje swą największą wartość w dwóch miejscach). Stąd odpowiedź:

1° Jeśli $99/p$ jest liczbą całkowitą, najbardziej prawdopodobna liczba rzutów to $99/p$ oraz $99/p+1$.

2° Jeśli $99/p$ nie jest liczbą całkowitą, to najbardziej prawdopodobną liczbą rzutów jest $\lfloor 99/p\rfloor+1$. □

Bardzo podobne rozumowanie można napotkać w następującym zagadnieniu, istotnym z punktu widzenia zastosowań.

Przykład 3.30. Rozważmy schemat n prób Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu p. Jaka liczba sukcesów jest najbardziej prawdopodobna?

Rozwiązanie. Mamy znaleźć $k\in\{0,1,\ldots,n\}$ takie, że odpowiadająca liczba

$$p_k=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

jest największa możliwa. Postępujemy jak w poprzednim przykładzie: weźmy pod uwagę iloraz

$$\frac{p_{k+1}}{p_k}=\frac{(n-k)p}{(k+1)(1-p)}.$$

Widzimy, iż $p_{k+1}/p_k>1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $k<(n+1)p-1$; ponadto, równość $p_{k+1}=p_k$ jest równoważna $k=(n+1)p-1$. Powtarzając powyższą analizę, dostajemy następującą dwuczęściową odpowiedź:

1° Jeśli liczba $(n+1)p$ jest całkowita, to największy wyraz ciągu $(p_k)_{k=0}^n$ odpowiada indeksom $k=(n+1)p-1$ oraz $k=(n+1)p$.

2° Jeśli liczba $(n+1)p$ nie jest całkowita, to największy wyraz ciągu $(p_k)_{k=0}^n$ odpowiada indeksowi $k=\lfloor (n+1)p\rfloor$. □

Rozwiążemy teraz zadanie łączące schemat Bernoulliego ze wzorem na prawdopodobieństwo całkowite i wzór Bayesa.

Przykład 3.31. W klasie VI A jest 15 dziewcząt i 15 chłopców, a w klasie VI B - 18 dziewcząt i 12 chłopców. Nauczyciel losuje klasę, a następnie, w wybranej klasie w ciągu kolejnych 10 dni wybiera po jednej osobie do odpowiedzi.

a) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że co najmniej jeden chłopiec został przepytany?

b) Załóżmy, że wylosowano co najmniej jeden chłopiec został przepytany. Jakie jest prawdopodobieństwo, że nauczyciel wylosował klasę VI A?

Rozwiązanie. a) Wprowadźmy zdarzenia H_1 - nauczyciel wybrał klasę VI A, H_2 - nauczyciel wybrał klasę VI B, C - co najmniej jeden chłopiec został przepytany. Z warunków zadania, mamy $\mathbb{P}(H_1) = \mathbb{P}(H_2) = 1/2$; ponadto,

$$\mathbb{P}(C|H_1) = 1 - \mathbb{P}(C'|H_1) = 1 - \left(\frac{15}{30}\right)^{10},$$

$$\mathbb{P}(C|H_2) = 1 - \mathbb{P}(C'|H_1) = 1 - \left(\frac{18}{30}\right)^{10},$$

co wynika wprost z rozważenia odpowiednich schematów Bernoulliego. Przykładowo, załóżmy, że nauczyciel wybrał klasę VI A. Wówczas losowanie kolejnych uczniów do odpowiedzi można utożsamić ze schematem 10 prób Bernoulliego, z sukcesem będącym wylosowaniem chłopca. Zdarzenie C' oznacza wówczas pojawienie się 10 porażek, skąd wzór na $\mathbb{P}(C'|H_1)$ powyżej. Rozumowanie prowadzące do $\mathbb{P}(C|H_2)$ jest analogiczne. Ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite, otrzymujemy więc

$$\mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{15}{30}\right)^{10}\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{18}{30}\right)^{10}\right).$$

b) Korzystając ze wzoru Bayesa,

$$\mathbb{P}(H_1|C) = \frac{\mathbb{P}(C|H_1)\mathbb{P}(H_1)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\left(1 - \left(\frac{15}{30}\right)^{10}\right) \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{15}{30}\right)^{10}\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{18}{30}\right)^{10}\right)} \qquad \square$$

Schemat Bernoulliego można uogólnić na przypadek, gdy w pojedynczej próbie jest więcej wyróżnionych wyników. Ściślej, rozważmy ciąg niezależnych powtórzeń pojedynczego doświaczenia, w którym możliwe wyniki to W_1, W_2, …, W_m, przy czym prawdopodobieństwo uzyskania wyniku W_j wynosi p_j. Poprzez analogię z klasycznym schematem Bernoulliego, możemy teraz zapytać o prawdopodobieństwo tego, że przy n powtórzeniach powyższej ,,uogólnionej próby", uzyskano k_1 wyników W_1, k_2 wyników W_2, …, k_m wyników W_m, gdzie k_1, k_2, …, k_m są nieujemnymi liczbami całkowitymi o sumie n. Prawdopodobieństwo takiego zdarzenia wynosi

$$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_m^{k_m}.$$

Przykład 3.32. Rzucono 10 razy kostką. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że uzyskano co najmniej dwie piątki lub co najmniej dwie szóstki?

Rozwiązanie. Powyższe doświadczenie polega na dziesięciokrotnym powtórzeniu pojedynczego rzutu, w którym wyróżniamy następujące możliwe wyniki: uzyskanie piątki (prawdopodobieństwo 1/6), uzyskanie szóstki (prawdopodobieństwo 1/6), bądź wyrzucenie czegoś innego (prawdopodobieństwo 2/3). Zdarzenie przeciwne do tego badanego w zadaniu to ,,uzyskano co najwyżej jedną piątkę i co najwyżej jedną szóstkę". Na mocy powyższych rozważań, prawdopodobieństwo tego zdarzenia to

$$\binom{10}{0,0,10}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^{10}+\binom{10}{1,0,9}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^9$$
$$+\binom{10}{0,1,9}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^{10}+\binom{10}{1,1,8}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^8 \approx 0.2015953.$$

Wobec tego, odpowiedź brzmi $1 - 0.2015953 = 0.7984047$. □

Przykład 3.33. Rozważmy uogólniony schemat n prób Bernoulliego o tej własności, że w pojedynczej próbie są trzy możliwe wyniki W_1, W_2, W_3 o prawdopodobieństwach p_1, p_2 oraz p_3, odpowiednio. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że liczba doświadczeń, w których uzyskano W_1, oraz liczba doświadczeń, w której uzyskano W_2, mają tę samą parzystość.

Rozwiązanie. Odpowiedź wyraża się poprzez sumę

$$\sum_{(k,\ell,m)\in S}\binom{n}{k,\ell,m}p_1^k p_2^\ell p_3^m.$$

Sumowanie rozciąga się po zbiorze S składającym się ze wszystkich trójek (k,ℓ,m) liczb całkowitych nieujemnych o sumie n takich, że k i ℓ mają tę samą parzystość. W celu ,,zwinięcia" tej sumy, rozważmy następujące tożsamości:

$$\sum_{k,\ell,m}\binom{n}{k,\ell,m}p_1^k p_2^\ell p_3^m = (p_1+p_2+p_3)^n = 1,$$
$$\sum_{k,\ell,m}\binom{n}{k,\ell,m}(-p_1)^k(-p_2)^\ell p_3^m = (-p_1-p_2+p_3)^n.$$

Weźmy teraz pod uwagę trójkę (k,ℓ,m) liczb całkowitych nieujemnych takich, że $k+\ell+m=n$. Jeśli k i ℓ mają tę samą parzystość, odpowiadające im wyrazy wystąpią ze znakiem plus w obu powyższych tożsamościach. Jeśli zaś k i ℓ mają różną parzystość, to w pierwszej sumie odpowiedni wyraz pojawi się z plusem, a w drugiej - z minusem. Wobec tego, dodając powyższe tożsamości i dzieląc obustronnie przez 2, dostajemy wynik:

$$\sum_{(k,\ell,m)\in S}\binom{n}{k,\ell,m}p_1^k p_2^\ell p_3^m = \frac{1+(-p_1-p_2+p_3)^n}{2}.$$

Wynik ten można otrzymać w oparciu o ,,zwykły" schemat Bernouliego. Mianowicie, załóżmy najpierw, że n jest liczbą parzystą. Wówczas badane w zadaniu zdarzenie ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy wynik W_3 pojawił się parzystą liczbę razy (istotnie: pozostaje wówczas parzysta liczba prób w których uzyskano W_1 lub W_2; wymusza to odpowiednią równość parzystości). Rozważmy uproszczony schemat n prób, w którym jako sukces przyjmujemy uzyskanie W_3, a jako porażkę - uzyskanie W_1 lub W_2. Prawdopodobieństwo tego, że sukces otrzymano w parzystej liczbie doświadczeń, wynosi

$$\frac{1+(2p-1)^n}{2} = \frac{1+(-p_1-p_2+p_3)^n}{2}$$

(por. Przykład 1.12 z rozdziału 1). Dla n nieparzystego postępujemy podobnie. □

Zadania

1. Rzucono trzy razy kostką. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że co najmniej raz wyrzucono szóstkę, jeśli wiadomo, że wyrzucono trzy różne liczby oczek?

2. Grupa n osób ($n \geq 3$), wśród których są osoby X, Y i Z, ustawia się losowo w kolejce. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że
a) X stoi bezpośrednio przed Y, jeśli Y stoi bezpośrednio przed Z?
b) X stoi przed Y, jeśli Y stoi przed Z?

3. Z talii 52 kart losujemy 5 kart bez zwracania. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że mamy dokładnie 3 asy, jeżeli wiadomo, że
a) mamy co najmniej jednego asa;
b) mamy asa czarnego koloru;
c) mamy asa pik;
d) pierwszą wylosowaną kartą jest as;
e) pierwszą wylosowaną kartą jest czarny as;
f) pierwszą wylosowaną kartą jest as pik.

4. Rzucono trzy razy kostką. Rozważmy zdarzenia A - pewien wynik się powtórzył, B - liczby oczek zapisane w kolejności wypadnięcia tworzą ciąg rosnący. Obliczyć $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B|A')$ oraz $\mathbb{P}(B)$.

5. W pewnej rodzinie jest dwójka dzieci.
a) Jednym z dzieci jest Andrzej. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że ma siostrę?
b) Starszym dzieckiem jest Andrzej. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że ma siostrę?

6. Urna zawiera 5 kul białych i 7 kul czarnych. Losujemy kulę, oglądamy ją i wrzucamy z powrotem, dokładając dwie kule takiego samego koloru. Czynność wykonujemy trzy razy.
a) Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że pierwsze dwie wyciągnięte kule są czarne, a trzecia jest biała.
b) Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że dokładnie dwie spośród wyciągniętych kul są czarne.

7. Dwaj strzelcy X oraz Y oddają strzały do tarczy. Przed każdym strzałem rzucają symetryczną monetą; jeśli wypadnie orzeł, strzela X; w przeciwnym razie, strzela Y. Strzelec X trafia w tarczę z prawdopodobieństwem 0.7, strzelec Y trafia z prawdopodobieństwem 0.8. Oddano dwa strzały. Wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że dwa razy strzelał strzelec X oraz cel został trafiony dokładnie raz.

8. W urnie znajdują się trzy prawidłowe kostki oraz jedna fałszywa, z samymi szóstkami. Losujemy kostkę, następnie wykonujemy nią rzut.
a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że wypadnie sześć oczek?
b) Załóżmy, że wypadło sześć oczek. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosowano fałszywą kostkę?
c) Załóżmy, że wypadło sześć oczek. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ponownie rzucając tą kostką, wyrzucimy sześć oczek?

9. W populacji jest 15% dyslektyków. Jeśli w teście diagnostycznym uczeń popełni 6 lub więcej błędów, to zostaje uznany za dyslektyka. Każdy dyslektyk na pewno popełni co najmniej 6 błędów w takim teście, ale również nie-dyslektyk może popełnić więcej niż 5 błędów – dzieje się tak z prawdopodobieńswem 0,1. Jasio popełnił w teście 6 błędów. Jakie jest prawdopodobieństwo, że jest dyslektykiem? Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w kolejnym teście też popełni co najmniej 6 błędów?

10. Partia pewnego towaru składa się z n sztuk. Prawdopodobieństwo tego, że dokładnie k sztuk jest wybrakowanych wynosi p_k, $k = 0, 1, \ldots, n$. Losujemy jedną sztukę i okazuje się, że jest wadliwa. Jaka jest szansa, że w partii jest k braków?

11. W pewnej fabryce telewizorów każdy z aparatów może być wadliwy z prawdopodobieństwem p. W fabryce są trzy stanowiska kontroli i wyprodukowany telewizor trafia na każde ze stanowisk z jednakowym prawdopodobieństwem. i-te stanowisko wykrywa wadliwy telewizor z prawdopodobieństwem p_i ($i = 1, 2, 3$). Telewizory nie odrzucone w fabryce trafiają do hurtowni i tam poddawane są dodatkowej kontroli, która wykrywa wadliwy telewizor z prawdopodobieństwem p_0.

a) Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że dany nowowyprodukowany telewizor znajdzie się w sprzedaży (tzn. przejdzie przez obie kontrole).

b) Przypuśćmy, że telewizor jest już w sklepie. Jakie jest prawdopodobieństwo, że jest on wadliwy?

12. Talię kart podzielono na dwie połowy, lewą i prawą. Wylosowano kartę z lewej połowy: okazało się, że jest ona asem. Następnie przełożono kartę do prawej połowy, otrzymane 27 kart przetasowano i wyciągnięto jedną kartę. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że ta karta jest asem?

13. Wybrano losowo podzbiory A, B zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ (każdy wybór podzbioru jest tak samo prawdopodobny).

a) Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że $A \subseteq B$.

b) Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że $A \cap B = \emptyset$.

14. Rzucamy dwa razy kostką. Rozważmy zdarzenia: A – za pierwszym razem wypadła liczba oczek podzielna przez 3; B – suma wyrzuconych oczek jest parzysta; C – za drugim razem liczba oczek jest parzysta. Czy zdarzenia A, B, C są niezależne parami? Czy są niezależne zespołowo?

15. Na n kartonikach zapisano n różnych liczb rzeczywistych. Kartoniki włożono do pudełka, starannie wymieszano, a następnie losowano kolejno bez zwracania. Niech A_k – k-ta wylosowana liczba jest większa od poprzednich.

a) Udowodnić, że $\mathbb{P}(A_k) = 1/k$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

b) Udowodnić, że zdarzenia $A_1, A_2, \ldots, A_n$ są niezależne.

16. Liczby $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ ustawiono losowo w ciąg $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$. Zbadać niezależność zdarzeń $\{a_1 < a_2\}$, $\{a_3 < a_4\}$, …, $\{a_{2n-1} < a_{2n}\}$.

17. Dane są liczby całkowite dodatnie m, n oraz liczby $p, q \in (0, 1)$ spełniające warunek $p + q = 1$. Dowieść, że

$$(1 - p^n)^m + (1 - q^m)^n \geq 1.$$

18. Rzucono trzy razy kostką. Niech A oznacza zdarzenie „suma oczek wynosi 8". Czy istnieje zdarzenie B na naturalnej przestrzeni probabilistycznej, niebędące zbiorem pustym i całym zbiorem Ω, niezależne od zdarzenia A?

19. Osoby X oraz Y rzucają prawidłową kostką, w kolejności $XYXYXY\ldots$. Wygrywa ten gracz, który uzyska tę samą liczbę oczek co drugi gracz w poprzednim rzucie. Obliczyć prawdopodobieństwo wygranej gracza X.

20. (Zadanie Banacha o zapałkach) Pewien matematyk nosi w kieszeniach (lewej i prawej) po jednym pudełku zapałek. Ilekroć chce zapalić papierosa, sięga do losowo wybranej kieszeni. Jaka jest szansa, że gdy po raz pierwszy wyciągnie puste pudełko, w drugim będzie k zapałek ($k = 0, 1, \ldots, m$, gdzie m jest liczbą zapałek w pełnym pudełku; zakładamy, że na początku oba pudełka są pełne).

21. Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną dla schematu n prób Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu p. Dla dowolnego $0 \leq k \leq n$, niech A_k oznacza zdarzenie, iż jest dokładnie k sukcesów. Wykazać, że dla dowolnego $B \in \mathcal{F}$ oraz każdego k, prawdopodobieństwo warunkowe $\mathbb{P}(B|A_k)$ nie zależy od p.

22. Osoby X oraz Y grają w grę składającą się z ciągu niezależnych losowań. Każde z losowań wygrywa X z prawdopodobieństwem p, gra kończy się w momencie gdy liczba wygranych jednego z graczy jest o 2 większa od liczby wygranych drugiego gracza. Obliczyć prawdopodobieństwo wygranej gracza X.

23. Z urny zawierającej 4 kule ponumerowane liczbami od 1 do 4 losujemy 10 razy po jednej kuli ze zwracaniem.

a) Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że wylosowaliśmy jedną jedynkę, dwie dwójki, trzy trójki oraz cztery czwórki.

b) Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że kula z numerem 4 pojawi się więcej razy niż kula z numerem 3.

c) Jaka jest najbardziej prawdopodobna liczba losowań, w których uzyskano jedynkę?

4. Zmienne losowe, ich rozkłady i parametry

4.1. **Pojęcie zmiennej losowej i jej rozkładu.** W wielu sytuacjach, podczas przeprowadzania eksperymentu losowego, interesuje nas nie tyle konkretny wynik tego doświadczenia, co raczej jakaś jego charakterystyka liczbowa (ściślej: pewna funkcja od wyniku). Przykładowo, rozważmy podwójny rzut kostką i załóżmy, iż interesuje nas, czy suma oczek wynosi 7. Wówczas nie jest ważne, czy potencjalna siódemka jest osiągana przez parę $(6,1)$, $(5,2)$, $(4,3)$, $(3,4)$, $(2,5)$ bądź $(1,6)$. Podobnie, podczas wykonywania (długiego) ciągu rzutów monetą, jeśli badamy łączną liczbę orłów, to nie jest dla nas istotne, na jakim konkretnym ciągu orłów/reszek jest ona realizowana. Formalnie rzecz ujmując, z czysto praktycznego punktu widzenia, ważnym obiektem mogą być *funkcje rzeczywiste zadane na ustalonej przestrzeni probabilistycznej*. Każdą taką funkcję, o ile jest mierzalna jako funkcja z $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ w $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$, nazywamy *zmienną losową* (mierzalność oznacza, iż przeciwobraz - przy zadanej funkcji - dowolnego zbioru z σ-ciała $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ należy do $\mathcal{F}$. Przykładowo, jeśli Ω jest zbiorem co najwyżej przeliczalnym oraz $\mathcal{F}=2^\Omega$, to każda funkcja jest mierzalna). Zazwyczaj zmienne losowe oznaczamy literami X, Y, Z, $\ldots$, bądź ξ, η, itp.

Zanim przejdziemy do przykładów, wprowadźmy ważne pojęcia rozkładu zmiennej losowej.

Definicja 4.1. Rozkładem zmiennej losowej X nazywamy miarę P_X na przestrzeni mierzalnej $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$, zadaną przez $P_X(A)=\mathbb{P}(X\in A)$.

Intuicyjnie rzecz ujmując, rozkład zmiennej losowej niesie informację jakie wartości są przyjmowane przez zmienną i jakie prawdopodobieństwa są z tym związane. Rozkład jest pojęciem dosyć abstrakcyjnym i z punktu widzenia konkretnych zastosowań, warto znać proste metody jego opisywania.

Definicja 4.2. Załóżmy, że X jest zmienną losową na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. Liczbę $x\in\mathbb{R}$ nazywamy *atomem* bądź *atomem rozkładu* zmiennej X, jeśli $\mathbb{P}(X=x)>0$. Zmienną losową nazywamy *dyskretną*, jeśli istnieje co najwyżej przeliczalny zbiór S taki, że $\mathbb{P}(X\in S)=1$ (czasami mówimy w takiej sytuacji, że zmienna X jest skoncentrowana na zbiorze S). Wówczas bez straty ogólności możemy przyjąć, że każdy punkt S jest atomem zmiennej X, zmniejszając zbiór S w razie potrzeby. W dyskretnym przypadku, rozkład zmiennej X jest zadany przez podanie mas wszystkich atomów. Ściślej, istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między rozkładami zmiennych dyskretnych skoncentrowanych na S, a funkcjami $p:S\to[0,\infty)$ spełniającymi warunek $\sum_{x\in S}p(x)=1$. Odpowiedniość tę można wyrazić poprzez tożsamość $p(x)=\mathbb{P}(X=x)$, $x\in S$.

Przykład 4.1. Rozważmy trzykrotny rzut monetą i niech X oznacza łączną liczbę orłów uzyskanych w tym doświadczeniu. Wówczas

$$\Omega=\{(O,O,O),(O,O,R),\ldots,(R,R,R)\},\ \mathcal{F}=2^\Omega$$

oraz $\mathbb{P}$ jest prawdopodobieństwem klasycznym. Zmienna X jest funkcją mierzalną na tej przestrzeni probabilistycznej, przyjmującą wartości w zbiorze $\{1,2,3\}$ (a zatem jest zmienną dyskretną): mamy

$$\begin{aligned}&X((R,R,R))=0,\\&X((R,R,O))=X((R,O,R))=X((O,R,R))=1,\\&X((R,O,O))=X((O,R,O))=X((O,O,R))=2,\\&X((O,O,O))=3.\end{aligned}$$

Ponadto, łatwo wyznaczamy prawdopodobieństwa, z jakimi X przyjmuje powyższe wartości: z treści wnosimy, że moneta jest symetryczna, a stąd

$$\mathbb{P}(X=0)=1/8,\quad \mathbb{P}(X=1)=3/8,\quad \mathbb{P}(X=2)=3/8,\quad \mathbb{P}(X=3)=1/8.$$

Równości te determinują rozkład zmiennej X.

Przykład 4.2. Z urny zawierającej 20 kul ponumerowanych liczbami od 1 do 20 losujemy trzy razy po jednej kuli a) bez zwracania, b) ze zwracaniem. Niech X oznacza największy numer na wyciągniętych kulach. Wyznaczyć rozkład X.

a) W przypadku losowania bez zwracania, przestrzeń probabilistyczna jest zadana przez równości $\Omega=\big\{(k,\ell,m): k,\ \ell,\ m\in\{1,2,\ldots,20\},\ k,\ell,m \text{ parami różne}\big\}$, $\mathcal{F}=2^\Omega$ oraz postulat, że $\mathbb{P}$ jest prawdopodobieństwem klasycznym. Widzimy, że X jest funkcją mierzalną na tej przestrzeni, określoną wzorem

$$X((k,\ell,m))=\max\{k,\ell,m\}\qquad \text{dla } (k,\ell,m)\in\Omega.$$

Bezpośrednio z definicji wnosimy, że zmienna X przyjmuje wartości w zbiorze $\{3,4,\ldots,20\}$. Rozkład tej zmiennej jest zadany przez masy poszczególnych atomów:

$$\mathbb{P}(X=j)=\frac{\binom{j-1}{2}}{\binom{20}{3}},\qquad j=3,4,\ldots,20.$$

b) W przypadku gdy losujemy ze zwracaniem, mamy $\Omega=\big\{(k,\ell,m): k,\ \ell,\ m\in\{1,2,\ldots,20\}\big\}$, $\mathcal{F}=2^\Omega$ oraz $\mathbb{P}$ jest prawdopodobieństwem klasycznym. Zmienna X jest zadana tym samym wzorem co w poprzednim podpunkcie. Tym razem jednak bezpośrednie obliczenie $\mathbb{P}(X=j)$ ($j=1,\,2,\,\ldots,\,20$) jest raczej dosyć uciążliwe. Aby obejść ten problem, zauważmy najpierw, że $\mathbb{P}(X\le j)=(j/20)^3$ dla $0\le j\le 20$, a następnie skorzystajmy z tożsamości

$$\mathbb{P}(X=j)=\mathbb{P}(X\le j)-\mathbb{P}(X\le j-1)=\left(\frac{j}{20}\right)^3-\left(\frac{j-1}{20}\right)^3.$$

Przykład 4.3. Rzucamy monetą, dla której prawdopodobieństwo wypadnięcia orła wynosi p, aż do momentu uzyskania orła bądź wyrzucenia n reszek. Niech X będzie liczbą wykonanych rzutów. Wówczas przestrzeń probabilistyczna zadana jest następująco: mamy

$$\Omega=\left\{(O),(R,O),(R,R,O),\ldots,\underbrace{(R,R,\ldots,O)}_{n\text{ razy}},\underbrace{(R,R,R,\ldots,R)}_{n\text{ razy}}\right\},$$

$\mathcal{F} = 2^\Omega$ jest pełnym σ-ciałem oraz $\mathbb{P}$ jest zadane przez równości

$$\mathbb{P}\left(\left\{\underbrace{(R,R,R,\ldots,O)}_{k \text{ razy}}\right\}\right) = (1-p)^{k-1}p, \qquad k = 1,2,\ldots,n,$$

$$\mathbb{P}\left(\left\{\underbrace{(R,R,R,\ldots,R)}_{n \text{ razy}}\right\}\right) = (1-p)^{n}.$$

Funkcja X jest zmienną losową, zadaną przez równości

$$X\left(\underbrace{(R,R,R,\ldots,O)}_{k \text{ razy}}\right) = k, \qquad X\left(\underbrace{(R,R,R,\ldots,R)}_{n \text{ razy}}\right) = n.$$

Rozkład łatwo odczytujemy z powyższych tożsamości.

Przykład 4.4. Załóżmy, że k jest ustaloną liczbą całkowitą dodatnią. Rzucamy prawidłową kostką aż do momentu wyrzucenia k szóstek (łącznie, niekoniecznie pod rząd). Niech X oznacza liczbę wykonanych rzutów. Wyznaczyć rozkład zmiennej X.

Rozwiązanie. Zmienna X przyjmuje wartości w zbiorze $\{k, k+1, k+2, \ldots, \infty\}$; tak więc, w przeciwieństwie do poprzednich przykładów, widzimy, że zbiór wartości zmiennej X jest nieskończony (lecz przeliczalny). Zdarzenie $\{X = j\}$ oznacza, iż w j-tym rzucie uzyskaliśmy szóstkę oraz w poprzednich $j-1$ rzutach wyrzucono łącznie $k-1$ szóstek. Korzystając ze schematu Bernoulliego, obliczamy

$$\mathbb{P}(X=j) = \binom{j-1}{k-1}\left(\frac{1}{6}\right)^{k-1}\left(\frac{5}{6}\right)^{j-k}\cdot\frac{1}{6} = \binom{j-1}{k-1}\left(\frac{1}{6}\right)^{k}\left(\frac{5}{6}\right)^{j-k}.$$

Pozostaje do obliczenia prawdopodobieństwo tego, że $\mathbb{P}(X=\infty)$. W tym celu, wyznaczmy sumę $\sum_{j=k}^\infty \mathbb{P}(X=j)$: dopełnienie tej sumy do jedynki będzie brakującym prawdopodobieństwem.

Nietrudno wykazać indukcyjnie, że powyższa suma wynosi 1 dla wszystkich k. Istotnie, dla $k=1$ otrzymujemy ów fakt ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego. Następnie, załóżmy prawdziwość tezy dla $k-1$ i spróbujmy ją wykazać dla k. Otóż

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=k}^\infty \binom{j-1}{k-1}\left(\frac{1}{6}\right)^{k}\left(\frac{5}{6}\right)^{j-k}\\
&= \sum_{j=k}^\infty \binom{j-2}{k-1}\left(\frac{1}{6}\right)^{k}\left(\frac{5}{6}\right)^{j-k} + \sum_{j=k}^\infty \binom{j-2}{k-2}\left(\frac{1}{6}\right)^{k}\left(\frac{5}{6}\right)^{j-k}\\
&= \frac{5}{6}\sum_{j=k}^\infty \binom{j-1}{k-1}\left(\frac{1}{6}\right)^{k}\left(\frac{5}{6}\right)^{j-k} + \frac{1}{6}\sum_{j=k-1}^\infty \binom{j-1}{(k-1)-1}\left(\frac{1}{6}\right)^{k-1}\left(\frac{5}{6}\right)^{j-(k-1)}.
\end{aligned}$$

Po przerzuceniu pierwszego szeregu z ostatniej linijki na lewą stronę i skorzystaniu z założenia indukcyjnego, dostajemy prawdziwość tezy. Zatem $\sum_{j=k}^\infty \mathbb{P}(X=j) = 1$, skąd $\mathbb{P}(X=\infty) = 0$. $\square$

Przykład 4.5. Z odcinka $[0,1]$ losujemy dwa punkty i przez X oznaczamy odległość między tymi punktami. Wówczas $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}) = ([0,1]^2, \mathcal{B}([0,1]^2), |\cdot|)$ i X jest funkcją mierzalną na tej przestrzeni probabilistycznej, zadaną przez $X((x,y)) = |x-y|$. Zwróćmy uwagę, iż tym razem zbiór możliwych wartości zmiennej X jest nieprzeliczalny (jest to przedział $[0,1]$), a ponadto zmienna X nie posiada atomów - dla dowolnej liczby z z tego przedziału mamy $\mathbb{P}(X=z)=0$.

Aby opisać rozkład powyższej zmiennej losowej, wprowadźmy pojęcie dystrybuanty. Jest to uniwersalny obiekt - determinuje on rozkład dla dowolnej zmiennej losowej (tzn. niekoniecznie dyskretnej).

Definicja 4.3. Załóżmy, że X jest zmienną losową. *Dystrybuantą tej zmiennej* (bądź *dystrybuantą rozkładu tej zmiennej*) nazywamy funkcję $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ daną wzorem

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Wracając do powyższego przykładu: jak już zauważyliśmy, zmienna X przyjmuje wartości w przedziale $[0,1]$, skąd $F_X(t) = 0$ dla $t < 0$ (gdyż zdarzenie $\{X \leq t\}$ jest wówczas zdarzeniem niemożliwym) oraz $F_X(t) = 1$ dla $t \geq 1$ (zdarzenie $\{X \leq t\}$ jest pewne). Pozostaje więc wyznaczyć dystrybuantę na przedziale $[0,1)$. Ustalmy więc liczbę t z tego zbioru; jak łatwo sprawdzić korzystając z prawdopodobieństwa geometrycznego, mamy

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = 1 - (1-t)^2 = 2t - t^2.$$

Tak więc, ostatecznie,

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0, \\ 2t - t^2 & \text{dla } t \in [0,1), \\ 1 & \text{dla } t \geq 1. \end{cases}$$

4.2. **Wartość oczekiwana.** Przechodzimy do pojęcia wartości oczekiwanej.

Definicja 4.4. Załóżmy, że X jest zmienną losową określoną na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Wartością oczekiwaną (średnią) zmiennej X nazywamy liczbę

$$\mathbb{E}X = \int_\Omega X \, \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_\mathbb{R} x \, \mathrm{d}P_X,$$

o ile całki istnieją. W przypadku gdy zmienna X jest dyskretna i jest skoncentrowana na zbiorze S, wartość oczekiwana wyraża się przez sumę

$$\mathbb{E}X = \sum_{x \in S} x \mathbb{P}(X = x).$$

Wobec tego, przynajmniej w przypadku dyskretnym, wartość oczekiwana zmiennej X posiada następującą fizyczną interpretację. Jest to ważona średnia wartości które mogą być przyjęte przez X, gdzie każda wartość ma masę odpowiadającą jej prawdopodobieństwu.

Przykład 4.6. Załóżmy, że $A \in \mathcal{F}$ jest ustalonym zdarzeniem. Definiujemy *funkcję charakterystyczną* bądź *indykator* A wzorem

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } \omega \in A, \\ 0 & \text{jeśli } \omega \notin A. \end{cases}$$

Jest to zero-jedynkowa zmienna losowa (przyjmuje wartości w zbiorze $\{0,1\}$). Jak zobaczymy później, zmienne tego typu bardzo często przydają się przy liczeniu wartości oczekiwanych skomplikowanych zmiennych losowych, gdzie służą jako proste ,,elementy składowe" takich obiektów. Bezpośrednio obliczamy, że

$$\mathbb{E}1_A = 0 \cdot \mathbb{P}(1_A = 0) + 1 \cdot \mathbb{P}(1_A = 1) = \mathbb{P}(A).$$

Przykład 4.7. Dysponujemy fałszywą kostką, w której na ścianie z trzema oczkami domalowano dwa dodatkowe oczka. Rzucamy tą kostką i oznaczamy przez X liczbę wyrzuconych oczek. Wyznaczyć rozkład zmiennej X oraz jej wartość oczekiwaną.

Rozwiązanie. Bezpośrednio z warunków zadania, widzimy, że zmienna X jest skoncentrowana na zbiorze $\{1, 2, 4, 5, 6\}$ oraz

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(X = 4) = \mathbb{P}(X = 6) = 1/6, \quad \mathbb{P}(X = 5) = 1/3.$$

Równości te wyznaczają rozkład. Wartość oczekiwana wynosi

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X &= 1 \cdot \mathbb{P}(X = 1) + 2 \cdot \mathbb{P}(X = 2) + 4 \cdot \mathbb{P}(X = 4) + 5 \cdot \mathbb{P}(X = 5) + 6 \cdot \mathbb{P}(X = 6) \\ &= \frac{1}{6}(1 + 2 + 4 + 6) + \frac{1}{3} \cdot 5 = \frac{23}{6}. \end{aligned}$$

□

Przykład 4.8. W klasie I A jest 36 uczniów, w klasie I B jest 40 uczniów, a w I C - 44 uczniów. Wybieramy losowo ucznia z pierwszej klasy i oznaczamy przez X liczność klasy do której chodzi. Wyznaczyć wartość oczekiwaną X.

Rozwiązanie. Ponieważ każdy uczeń ma tę samą szansę na wylosowanie, mamy

$$\mathbb{P}(X = 36) = \frac{36}{120}, \qquad \mathbb{P}(X = 40) = \frac{40}{120} \quad \text{oraz} \quad \mathbb{P}(X = 44) = \frac{44}{120}.$$

Wobec tego

$$\mathbb{E}X = 36 \cdot \frac{36}{120} + 40 \cdot \frac{40}{120} + 44 \cdot \frac{44}{120} = 40.2667.$$

Warto to porównać z faktem, że średnia liczba uczniów w klasie pierwszej wynosi 40. Innymi słowy, jeśli wylosujemy klasę (przy czym *wybór każdej klasy będzie tak samo prawdopodobny*), to wówczas wartość oczekiwana liczby uczniów w tej klasie wynosi 40. W powyższej sytuacji, klasy nie są równoprawdopodobne - przykładowo, jest większa szansa wylosowania ucznia z klasy C niż z klasy A. Stąd odpowiadająca wartość oczekiwana się zwiększa: liczniejsze klasy są bardziej prawdopodobne. □

Przykład 4.9. W urnie znajduje się jedna biała i jedna czarna kula. Wykonujemy następujący ciąg losowań: ciągniemy kulę, oglądamy ją, wrzucamy z powrotem i dokładamy jedną kulę czarną. Czynność powtarzamy aż do momentu, gdy wylosujemy kulę białą. Niech X oznacza liczbę losowań. Wyznaczyć rozkład zmiennej X oraz jej wartość oczekiwaną.

Rozwiązanie. Zmienna X przyjmuje wartości w zbiorze $\{1, 2, \ldots, \infty\}$. Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej k, zdarzenie $\{X = k\}$ oznacza, że w pierwszych $k - 1$ losowaniach uzyskaliśmy same czarne kule, a w ostatnim losowaniu wyciągnęliśmy kulę białą. Stąd

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{k-1}{k} \cdot \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}.$$

Ponadto,

$$\mathbb{P}(X = \infty) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 0,$$

co już jednoznacznie zadaje rozkład X. Ponadto, widzimy, że

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} = \infty,$$

czyli średnia wynosi nieskończoność. $\square$

Przykład 4.10. Rozważmy doświadczenie z poprzedniego zadania, przy czym zmiennej X zmieniamy znak jeśli liczba losowań była nieparzysta. Wówczas wartość oczekiwana X nie istnieje. Istotnie, mamy

$$\mathbb{E}X = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} (-1)^k k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \frac{(-1)^k}{k+1},$$

i ostatni szereg nie jest zbieżny - sumy pochodzące od ujemnych i dodatnich składników rozbiegają do nieskończoności.

Przykład 4.11. W pewnym teleturnieju gracz ma odpowiadać na dwa pytania $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ w ustalonej przez siebie kolejności, przy czym jest dopuszczony do drugiego pytania tylko w przypadku gdy poda prawidłową odpowiedź na pierwsze. Prawdopodobieństwo tego, że gracz odpowie na pytanie $\mathfrak{P}_i$ wynosi P_i, a nagroda za dobrą odpowiedź wynosi N_i, $i = 1, 2$. Gracz chce zmaksymalizować swoją średnią wygraną. Jaką strategię powinien przyjąć?

Rozwiązanie. Są dwie możliwe strategie: odpowiadać na pytania w kolejności $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, bądź $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_1$. Weźmy pod uwagę pierwszą strategię. Wówczas zysk gracza wynosi

$$\begin{array}{ll} 0 & \text{z prawdopodobieństwem } 1 - P_1, \\ N_1 & \text{z prawdopodobieństwem } P_1(1 - P_2), \\ N_1 + N_2 & \text{z prawdopodobieństwem } P_1P_2. \end{array}$$

Wobec tego, średnia wygrana dla tej strategii wynosi

$$N_1P_1(1 - P_2) + (N_1 + N_2)P_1P_2.$$

Rozumując analogicznie, wartość oczekiwana w przypadku wybrania kolejności $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_1$ jest równa

$$N_2P_2(1 - P_1) + (N_1 + N_2)P_1P_2.$$

Wnosimy stąd, iż pierwsza strategia jest korzystniejsza wtedy i tylko wtedy, gdy $N_1P_1(1 - P_2) > N_2P_2(1 - P_1)$, czyli, równoważnie,

$$\frac{N_1P_1}{1 - P_1} > \frac{N_2P_2}{1 - P_2}.$$

W przypadku prawdziwości nierówności przeciwnej, warto wybrać drugą strategię. $\square$

Na zakończenie, znaznaczmy, iż wartość oczekiwana jest operatorem liniowym, co wynika wprost z definicji. Innymi słowy, jeśli X_1, X_2, …, X_n są danymi zmiennymi losowymi posiadającymi skończone wartości oczekiwane $\mathbb{E}X_1$, $\mathbb{E}X_2$, …, $\mathbb{E}X_n$, oraz a_1, a_2, …, a_n są ustalonymi liczbami rzeczywistymi, to

$$\mathbb{E}\big(a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n\big) = a_1\mathbb{E}X_1 + a_2\mathbb{E}X_2 + \ldots + a_n\mathbb{E}X_n.$$

Własność ta okaże się być bardzo użyteczna w trakcie dalszych rozważań poniżej.

4.3. **Wartość oczekiwana funkcji zmiennej losowej.** Niekiedy zdarza się, iż dysponujemy pewną zmienną losową i interesuje nas nie tyle średnia tej zmiennej, co średnia pewnej funkcji tej zmiennej; innymi słowy, mamy zadaną pewną funkcję f i naszym celem jest wyznaczenie $\mathbb{E}f(X)$. Wówczas możemy potraktować $f(X)$ jako nową zmienną losową, spróbować wyznaczyć jej rozkład, a następnie obliczyć średnia; istnieje jednak prostszy sposób. Mamy mianowicie następujący fakt.

Twierdzenie 4.1. *Załóżmy, że $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją borelowską (to gwarantuje, że $f(X)$ będzie funkcją mierzalną na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$). Wówczas*

$$\mathbb{E}f(X) = \int_\Omega f(X) d\mathbb{P} = \int_\mathbb{R} f(x) dP_X,$$

o ile całki po prawej stronie istnieją. W przypadku gdy zmienna X jest dyskretna i skoncentrowana na zbiorze przeliczalnym S, mamy

$$\mathbb{E}f(X) = \sum_{x \in S} f(x)\mathbb{P}(X = x).$$

Przykład 4.12. Ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 10\}$ losujemy liczbę. Obliczyć średnią odległość tej liczby od 2.

Rozwiązanie. Jeśli oznaczymy przez X wylosowaną liczbę, to naszym celem jest obliczenie $\mathbb{E}|X - 2|$. Ponieważ rozkład X jest zadany przez równości $\mathbb{P}(X = j) = 1/10$, $j = 1, 2, \ldots, 10$, to na mocy powyższego twierdzenia,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|X - 2| &= \sum_{j=1}^{10} |j - 2| \cdot \mathbb{P}(X = j)\\ &= \frac{1}{10}\sum_{j=1}^{10} |j - 2| = \frac{1}{10} + \frac{1}{10}\sum_{j=3}^{10} |j - 2| = \frac{1}{10} + \frac{36}{10} = 3.7. \qquad \square\end{aligned}$$

Przykład 4.13. Przed Dniem Matki, właściciel kwiaciarni chce zamówić pewną liczbę róż. Zysk pochodzący ze sprzedaży jednej róży wynosi b zł, natomiast strata generowana przez każdy niesprzedany kwiat wynosi ℓ zł. Liczba X sprzedanych róż jest zmienną losową o rozkładzie zadanym przez ciąg $p(j)$, $j = 0, 1, 2, \ldots$. Ile róż powinien zamówić właściciel kwiaciarni, aby zmaksymalizować swój średni zysk?

Rozwiązanie. Dla wygody założymy, że ciąg $p(j)$ nie zawiera zer; ułatwi to nieco redakcję rozwiązania (w przypadku ogólnym, rozumowanie jest analogiczne, lecz odpowiedź może być niejednoznaczna). Oznaczmy liczbę zamówionych róż przez s. Zysk osiągnięty przez kwiaciarnię to zmienna losowa Z zadana przez

$$Z = \begin{cases} bX - \ell(s - X) & \text{jeśli } X \le s, \\ bs & \text{jeśli } X > s \end{cases}$$

(bądź, zwartym wzorem, $Z = b\min(X, s) - \ell(s - X)_+$). Celem właściciela kwiaciarni jest zmaksymalizowanie wartości oczekiwanej zmiennej Z. Zgodnie z powyższym twierdzeniem, średnia ta wynosi

$$\begin{aligned}\mathbb{E}Z &= \sum_{j=0}^{s} (bj - \ell(s - j))\mathbb{P}(X = j) + \sum_{j=s+1}^{\infty} bs\mathbb{P}(X = j)\\ &= \sum_{j=0}^{s} (bj - \ell(s - j))p(j) + \sum_{j=s+1}^{\infty} bsp(j) = E(s).\end{aligned}$$

Aby znaleźć s dla którego $E(s)$ jest największe, spójrzmy na różnicę $E(s+1)-E(s)$. Mamy

$$\begin{aligned} E(s+1) &= \sum_{j=0}^{s+1}(bj-\ell(s+1-j))p(j) + \sum_{j=s+2}^{\infty} b(s+1)p(j) \\ &= \sum_{j=0}^{s+1}(bj-\ell(s-j))p(j) + \sum_{j=s+2}^{\infty} bsp(j) - \ell\sum_{j=0}^{s+1}p(j) + \sum_{j=s+2}^{\infty} bp(j) \\ &= E(s) + (b+\ell)p(s+1) - \ell\sum_{j=0}^{s+1}p(j) + \sum_{j=s+2}^{\infty} bp(j) \\ &= E(s) - \ell\sum_{j=0}^{s}p(j) + b\sum_{j=s+1}^{\infty} p(j), \end{aligned}$$

skąd wynika, że

$$E(s+1)-E(s) = -\ell\sum_{j=0}^{s}p(j) + b\sum_{j=s+1}^{\infty} p(j).$$

Zwróćmy teraz uwagę, że gdy s rośnie, to liczba $\sum_{j=0}^{s} p(j)$ rośnie, podczas gdy $\sum_{j=s+1}^{\infty} p(j)$ maleje. Co więcej, pierwsza z sum zbiega do 1 a druga do 0 gdy $s\to\infty$. Wobec tego istnieje liczba całkowita s taka, że $\ell\sum_{j=0}^{s} p(j) \geq b\sum_{j=s+1}^{\infty} p(j)$. Niech s^* będzie najmniejszą liczbą o tej własności. Wówczas widzimy, że $E(s+1) > E(s)$ dla $s < s^*$ oraz $E(s+1) \leq E(s)$ dla $s \geq s^*$. Wobec tego s^* jest optymalną liczbą róż. Korzystając z tego, że $\sum_{j=0}^{s} p(j) + \sum_{j=s+1}^{\infty} p(j) = 1$, możemy podać nieco bardziej czytelną definicję s^*: jest to najmniejsza taka liczbą całkowita $s \geq 0$, że

$$\sum_{j=0}^{s} p(j) \geq \frac{b}{b+\ell}. \quad \square$$

Przykład 4.14. Rzucamy symetryczną monetą aż do momentu uzyskania orła. Obliczyć $\mathbb{E}\frac{1}{X(X+1)}$, gdzie X oznacza liczbę rzutów.

Rozwiązanie. Łatwo wyznaczyć rozkład zmiennej X: mamy

$$\mathbb{P}(X=k) = 2^{-k}, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Wobec tego, $\mathbb{E}\frac{1}{X(X+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}/(k(k+1))$. Aby zwinąć tę sumę, rozważmy funkcję

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k(k+1)}.$$

Mamy $f''(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = 1/(1-x)$, skąd $f'(x) = -\log(1-x)$ (nie ma dodatkowego składnika, gdyż obie strony zerują się dla $x = 0$), a więc

$$f(x) = (1-x)\log(1-x) + x.$$

Wobec tego,

$$\mathbb{E}\frac{1}{X(X+1)} = 2f(1/2) = 1 - \log 2. \quad \square$$

4.4. **Wariancja.** Wartość oczekiwana mówi nam o tym, jaka jest *średnia* wartość zmiennej X. Kolejnym parametrem, którym się teraz zajmiemy, jest *wariancja*: odpowiada ona za „rozrzut" zmiennej. Aby lepiej zrozumieć, po co wprowadzamy to pojęcie, rozważmy następujące trzy zmienne losowe:

$$X = 0,$$
$$Y = \begin{cases} 1 & \text{z prawdopodobieństwem } 1/2, \\ -1 & \text{z prawdopodobieństwem } 1/2, \end{cases}$$
$$Z = \begin{cases} 100 & \text{z prawdopodobieństwem } 1/2, \\ -100 & \text{z prawdopodobieństwem } 1/2. \end{cases}$$

Z punktu widzenia wartości oczekiwanej, te zmienne nie różnią się między sobą - wszystkie mają średnią zero. Tym niemniej jest intuicyjnie jasne, że pierwsza z nich nie ma żadnego rozrzutu, druga z nich ma „umiarkowany" rozrzut, natomiast trzecia z nich wykazuje największe odchylenia od swojej wartości oczekiwanej.

W jaki sposób definiujemy wariancję? Jak zaznaczyliśmy przed chwilą, obiekt ten ma mierzyć jak bardzo dana zmienna losowa odchyla się od swojej średniej. Stąd jeden z możliwych pomysłów to wzięcie średniej $\mathbb{E}|X - \mathbb{E}X|$. Okazuje się jednak, że tak zdefiniowana wariancja nie jest wygodna - nie posiada pewnych specjalnych algebraicznych własności. Znacznie lepszym pomysłem jest mierzenie odchylenia w sensie średniokwadratowym. Ściślej, mamy następującą definicję.

Definicja 4.5. Dla danej zmiennej losowej X posiadającej skończoną wartość oczekiwaną $\mathbb{E}X$, definiujemy jej wariancję wzorem

$$\operatorname{Var} X = \mathbb{E}\big(X - \mathbb{E}X\big)^2.$$

Odchyleniem standardowym zmiennej X nazywamy liczbę $\sigma_X = \sqrt{\operatorname{Var} X}$.

Przeprowadzając proste przekształcenia i korzystając z liniowości wartości oczekiwanej, łatwo wyprowadzić alternatywny wzór na wariancję

$$\operatorname{Var} X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2,$$

który w wielu sytuacjach oferuje najprostszy sposób jej obliczenia.

Przykład 4.15. Ze zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ losujemy liczbę X. Obliczyć $\operatorname{Var} X$.

Rozwiązanie. Korzystamy bezpośrednio z definicji. Rozkład zmiennej X zadany jest przez równości $\mathbb{P}(X = k) = 1/n$, $k = 1, 2, \dots, n$, a więc

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n+1}{2}$$

i analogicznie,

$$\mathbb{E}X^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Wobec tego,

$$\operatorname{Var} X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{n^2-1}{12}. \quad \square$$

Bezpośrednio z definicji, wariancja posiada następującą własność: jeśli X jest zmienną losową o skończonej wartości oczekiwanej oraz a, b są liczbami rzeczywistymi, to

$$\mathrm{Var}(aX+b) = a^2\,\mathrm{Var}\,X.$$

Przykład 4.16. Rzucamy trzy razy prawidłową monetą. Niech X oznacza różnicę między liczbą wyrzuconych reszek i wyrzuconych orłów. Obliczyć $\mathbb{E}X$ oraz $\mathrm{Var}\,X$.

Rozwiązanie. Oznaczmy przez R liczbę wyrzuconych reszek, a przez $\mathcal{O}$ - liczbę wyrzuconych orłów. Zachodzą równości $R+\mathcal{O}=3$ oraz $X=R-\mathcal{O}$, skąd bezpośrednio wynika, że $X=2R-3$. Ponadto, łatwo wyznaczyć rozkład R: mamy

$$\mathbb{P}(R=0)=\frac{1}{8}, \qquad \mathbb{P}(R=1)=\frac{3}{8}, \qquad \mathbb{P}(R=2)=\frac{3}{8}, \qquad \mathbb{P}(R=3)=\frac{1}{8}.$$

Wobec tego, korzystając z liniowości wartości oczekiwanej,

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}(2R-3) = 2\mathbb{E}R - \mathbb{E}3 = 2\left(0\cdot\frac{1}{8}+1\cdot\frac{3}{8}+2\cdot\frac{3}{8}+3\cdot\frac{1}{8}\right)-3=0$$

(wynik ten jest intuicyjnie oczywisty: średnio, liczba reszek i orłów jest ta sama i wynosi $3/2$). Ponadto, korzystając z powyższej własności wariancji,

$$\mathrm{Var}\,X = \mathrm{Var}(2R-3) = 4\,\mathrm{Var}\,R.$$

Jak już obliczyliśmy wcześniej, $\mathbb{E}R = 3/2$ oraz

$$\mathbb{E}R^2 = 0^2\cdot\frac{1}{8}+1^2\cdot\frac{3}{8}+2^2\cdot\frac{3}{8}+3^2\cdot\frac{1}{8}=3.$$

Wobec tego, $\mathrm{Var}\,X = 4\,\mathrm{Var}\,R = 4(\mathbb{E}R^2-(\mathbb{E}R)^2)=3.$ □

Wprowadzimy teraz pojęcie kowariancji które, w pewnym sensie, służy do badania „liniowej zależności” między zmiennymi.

Definicja 4.6. Załóżmy, że X, Y są zmiennymi losowymi o skończonych wariancjach. Definiujemy *kowariancję* tych zmiennych wzorem

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(X-\mathbb{E}X)(Y-\mathbb{E}Y).$$

Widzimy, że jeśli $X=Y$, to $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Var}\,X$. Tak jak w przypadku wariancji, istnieje alternatywny wzór na kowariancję. Mamy mianowicie

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}XY - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y.$$

Przykład 4.17. Rzucamy 3 razy kostką. Niech X oznacza liczbę rzutów, w których wypadła dwójka, a Y oznacza liczbę rzutów, w których wypadła liczba szóstka. Obliczyć $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

Rozwiązanie. Zacznijmy od wyznaczenia rozkładów zmiennych X oraz Y. Korzystając ze schematu Bernoulliego, łatwo liczymy, że

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=0)=\mathbb{P}(Y=0)&=\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{125}{216},\\ \mathbb{P}(X=1)=\mathbb{P}(Y=1)&=\binom{3}{1}\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{75}{216},\\ \mathbb{P}(X=2)=\mathbb{P}(Y=2)&=\binom{3}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\frac{5}{6}=\frac{15}{216},\\ \mathbb{P}(X=3)=\mathbb{P}(Y=3)&=\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{1}{216}.\end{aligned}$$

Wobec tego, $\mathbb{E}X=\mathbb{E}Y=0\cdot\frac{125}{216}+1\cdot\frac{75}{216}+2\cdot\frac{15}{216}+3\cdot\frac{1}{216}=1/2$. Aby wyznaczyć średnią zmiennej XY, spójrzmy na rozkład tej zmiennej. Jak łatwo zauważyć, zmienna ta przyjmuje wyłącznie wartości 0, 1 oraz 2. Ściślej,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(XY=2)&=\mathbb{P}(\{X=2 \text{ i } Y=1\}\cup\{X=1 \text{ i } Y=2\})\\ &=\mathbb{P}(\{X=2 \text{ i } Y=1\})+\mathbb{P}(\{X=1 \text{ i } Y=2\})\\ &=2\mathbb{P}(\{X=2 \text{ i } Y=1\})\\ &=2\cdot\binom{3}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{1}{36},\end{aligned}$$

gdzie w przedostatniej równości rozumujemy następująco: musimy wybrać dwa miejsca (z trzech możliwych) dla dwójek; na ostatnim, trzecim miejscu umieścimy szóstkę; pojawienie się konkretnej liczby na konkretnym miejscu ma prawdopodobieństwo 1/6. Analogicznie, dostajemy

$$\mathbb{P}(XY=1)=\mathbb{P}(\{X=1 \text{ i } Y=1\})=\binom{3}{1}\binom{2}{1}\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{4}{6}=\frac{4}{36},$$

a zatem

$$\mathbb{E}XY=0\cdot\mathbb{P}(XY=0)+1\cdot\frac{4}{36}+2\cdot\frac{1}{36}=\frac{1}{6}$$

i $\operatorname{Cov}(X,Y)=1/6-(1/2)^2=-1/12$.

Istnieje alternatywne podejście do tego zadania. Niech X_k oznacza liczbę rzutów w których uzyskano k oczek (tak więc $X=X_2$, $Y=X_6$). Zauważmy, że z symetrii, dla dowolnego $k\neq 2$ mamy $\operatorname{Cov}(X_2,X_k)=\operatorname{Cov}(X_2,X_6)$. Zatem

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(X_2,X_6)&=\mathbb{E}(X_2-\mathbb{E}X_2)(X_6-\mathbb{E}X_6)\\ &=\frac{1}{5}\mathbb{E}(X_2-EX_2)\big[X_1+X_3+X_4+X_5+X_6\\ &\qquad\qquad-\mathbb{E}(X_1+X_3+X_4+X_5+X_6)\big]\\ &=\frac{1}{5}\mathbb{E}(X_2-\mathbb{E}X_2)\big(3-X_2-\mathbb{E}(3-X_2)\big)\\ &=\frac{1}{5}\mathbb{E}(X_2-\mathbb{E}X_2)(-X_2+\mathbb{E}X_2)=-\frac{1}{5}\operatorname{Var}X_2.\end{aligned}$$

Ale, jak już wiemy, $\mathbb{E}X_2=1/2$. Ponadto, $\mathbb{E}X^2=1\cdot\frac{75}{216}+2^2\cdot\frac{15}{216}+3^2\cdot\frac{1}{216}=\frac{2}{3}$, skąd $\operatorname{Var}X_2=\frac{5}{12}$. W połączeniu z powyższym łańcuchem przekształceń, dostajemy $\operatorname{Cov}(X,Y)=\operatorname{Cov}(X_2,X_6)=-1/12$. □

Wykażemy teraz ważny wzór, pozwalający wyrazić wariancję sumy zmiennych losowych w terminach prostszych wielkości.

Twierdzenie 4.2. *Załóżmy, że $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są zmiennymi losowymi o skończonych wariancjach. Wówczas*

$$\operatorname{Var}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Var} X_j + 2 \sum_{1 \le j < k \le n} \operatorname{Cov}(X_j, X_k).$$

Dowód. Wprowadźmy zmienne $Y_j = X_j - \mathbb{E}X_j$. Wówczas

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) &= \mathbb{E}(Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n)^2 \\ &= \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{n} Y_j^2 + 2 \sum_{1 \le j < k \le n} Y_j Y_k\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}Y_j^2 + 2 \sum_{1 \le j < k \le n} \mathbb{E}Y_j Y_k \\ &= \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Var} X_j + 2 \sum_{1 \le j < k \le n} \operatorname{Cov}(X_j, X_k). \qquad \square\end{aligned}$$

Zastosowania tego wzoru zilustrujemy w poniższych rozważaniach.

4.5. **Przegląd niektórych rozkładów prawdopodobieństwa.** Opiszemy teraz pokrótce kilka podstawowych rozkładów, pojawiających się stosunkowo czesto w rozmaitych przykładach i zastosowaniach.

Rozkład Bernoulliego (rozkład dwumianowy). Załóżmy, że n jset ustaloną liczbą całkowitą dodatnią, p jest liczbą z przedziału $[0, 1]$ i rozważmy schemat n prób Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu p. Rozkładem Bernoulliego $B(n, p)$ nazywamy rozkład skoncentrowany na liczbach $\{1, 2, \ldots, n\}$, o masach zadanych przez równości

$$p(j) = \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Widzimy więc, że jeśli oznaczymy przez X liczbę sukcesów we wspomnianym wyżej schemacie Bernoulliego, to X ma rozkład $B(n, p)$: $\mathbb{P}(X = j) = p(j)$ dla $0 \le j \le n$.

Wyznaczymy teraz średnią oraz wariancję powyższej zmiennej X. Można obliczyć te parametry bezpośrednio z definicji, zaprezentujemy jednak nieco inne podejście. Wprowadźmy pomocnicze zmienne $X_1, X_2, \ldots, X_n$ w następujący sposób:

$$X_j = \begin{cases} 0 & \text{jeśli w } j\text{-tej próbie odnotowano porażkę,} \\ 1 & \text{jeśli w } j\text{-tej próbie odnotowano sukces,} \end{cases} \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Wówczas widzimy, iż $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ i w konsekwencji,

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}X_1 + \mathbb{E}X_2 + \ldots + \mathbb{E}X_n.$$

Zmienna X_j jest zero-jedynkowa (jest indykatorem zdarzenia $\{$w j-tej próbie zaobserwowano sukces$\}$), a więc, na mocy Przykładu 4.6,

$$\mathbb{E}X_j = \mathbb{P}(\{\text{w } j\text{-tej próbie zaobserwowano sukces}\}) = p, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Wynika stąd, że $\mathbb{E}X = np$. Ponadto, zwróćmy uwagę na to, że dla dowolnych j, k, zmienna X_jX_k też jest zero-jedynkowa; co więcej, jest ona równa jeden wtedy i tylko wtedy, gdy zarówno w j-tej jak i w k-tej próbie zanotowano sukcesy. Ponieważ poszczególne próby w schemacie Bernoulliego są niezależne, otrzymujemy

$$\mathbb{E}X_jX_k = \mathbb{P}(\{\text{sukcesy w próbach } j \text{ i } k\}) = p^2 = \mathbb{E}X_j\mathbb{E}X_k,$$

a więc $\mathrm{Cov}(X_j, X_k) = 0$. Zatem, korzystając z Twierdzenia 4.2,

$$\mathrm{Var}\, X = \mathrm{Var}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Var}\, X_j = np(1-p).$$

Przykład 4.18. Pewna firma produkuje żarówki i umieszcza je w partiach po 20 sztuk w paczce. Każda z nowowyprodukowanych żarówek może być wadliwa z prawdopodobieństwem 0.1; partię wycofuje się z dalszej obróbki jeśli zawiera co najmniej trzy wadliwe żarówki. Dziennie w fabryce produkuje się 100 partii żarówek. Jaka jest średnia i wariancja liczby niewycofanych partii?

Rozwiązanie. Oznaczmy przez X liczbę niewycofanych partii żarówek. Widzimy, że X ma rozkład Bernoulliego z parametrami 100, p, gdzie p oznacza prawdopodobieństwo tego, że w ustalonej partii żarówek będą co najmniej trzy wadliwe sztuki. Aby wyznaczyć p, ponownie korzystamy ze schematu Bernoulliego: tym razem mamy 20 prób (każda odpowiada pojedynczej żarówce), sukcesem jest zdarzenie $\{$żarówka nie jest wadliwa$\}$. Mamy

$$\begin{aligned} p &= \mathbb{P}(\text{liczba sukcesów wynosi } 18, 19 \text{ lub } 20) \\ &= \binom{20}{18}(0.9)^{18}(0.1)^2 + \binom{20}{19}(0.9)^{19}(0.1)^1 + \binom{20}{20}(0.9)^{20} = 0.67693. \end{aligned}$$

Wobec tego średnia zmiennej X wynosi $100 \cdot p = 67.693$, a wariancja jest równa $100 \cdot p \cdot (1-p) = 21.86969$. □

Rozkład Poissona. Załóżmy, że λ jest ustaloną liczbą dodatnią. Zmienna losowa X ma rozkład $\mathrm{Pois}(\lambda)$ (Poissona z parametrem λ), jeśli dla dowolnej liczby $k = 0, 1, 2, \ldots$ zachodzi równość

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\lambda^k/k!.$$

Rozkład Poissona jest stosowany w rozmaitych kontekstach. Przyczyną dla której pojawia się on w tak wielu sytuacjach jest to, iż może być on stosowany jako przybliżenie rozkładu Bernoulliego $B(n, p)$ w przypadku gdy n jest duże, p jest małe, a np wynosi w przybliżeniu λ. Ściślej, załóżmy, że Y ma rozkład Bernoulliego $B(n, p)$ i niech $\lambda = np$. Wówczas

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = k) &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{n^k} \cdot \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}. \end{aligned}$$

Zauważmy teraz, że jeśli n jest duże, a λ jest umiarkowane, to

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{n^k} \approx 1, \qquad \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \approx 1$$

oraz
$$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \approx e^{-\lambda}.$$
Wobec tego, $\mathbb{P}(X=k) \approx e^{-\lambda}\lambda^k/k!$. Powyższy rachunek, pomimo iż pokazuje skąd bierze się rozkład Poissona, jest stosunkowo nieprecyzyjny. Nieco bardziej dokładne oszacowanie jest celem następującego twierdzenia (bez dowodu).

Twierdzenie 4.3 (Poisson)**.** *Załóżmy, że X ma rozkład Bernoulliego $B(n,p)$, a Y ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda = np$. Wówczas dla dowolnego podzbioru $A \subseteq \{0,1,2,\ldots\}$ zachodzi nierówność*
$$\big|\mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}(Y \in A)\big| \leq \frac{\lambda^2}{n}.$$

Przykład 4.19. Urna zawiera 99 białych kul oraz jedną czarną. Losujemy 100 razy ze zwracaniem po jednej kuli. Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że czarna kula pojawi się co najwyżej raz.

Rozwiązanie. Niech X oznacza liczbę losowań w których wyciągnięto czarną kulę. Intereuje nas przybliżona wartość prawdopodobieństwa $\mathbb{P}(X \leq 1)$. Jak łatwo zauważyć, zmienna X ma rozkład Bernoulliego z parametrami 100, 1/100. Na mocy powyższego twierdzenia, jeśli Y jest zmienna o rozkładzie Pois(1), to
$$|\mathbb{P}(X \leq 1) - \mathbb{P}(Y \leq 1)| \leq \frac{1}{100}.$$
Z drugiej strony, mamy $\mathbb{P}(Y \leq 1) = 2e^{-1} = 0.7357589$, a więc
$$\mathbb{P}(X \leq 1) \in [0.7257589, 0.7457589]. \qquad \square$$

Poniższy przykład pokazuje, iż rozkład Poissona może być używany do badania zdarzeń „rzadkich" i „całkowicie losowych".

Przykład 4.20. Na wyspie Hokkaido występuje średnio sześć trzęsień ziemi miesięcznie (tzn. na 30 dni). Wyznaczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że w przeciągu najbliższych siedmiu dni będzie tam co najwyżej jedno trzęsienie ziemi.

Rozwiązanie. Niech X oznacza liczbę trzęsień ziemi na Hokkaido w przeciągu najbliższego tygodnia. Główną trudnością zadania jest wybór odpowiedniego rozkładu prawdopodobieństwa dla zmiennej X. Aby zyskać nieco intuicji, spójrzmy na następujący ciąg przybliżeń.

1. Podzielmy tydzień na siedem dni i przyjmijmy - na chwilę - założenie, że w ciągu jednego dnia może mieć miejsce co najwyżej jedno trzęsienie ziemi. Ponadto, załóżmy, że trzęsienia ziemi w trakcie różnych dni są od siebie niezależne. Rzecz jasna, są to założenia dosyć kontrowersyjne, ale na chwilę przyjmijmy ich prawdziwość. Wówczas ciąg wydarzeń w trakcie kolejnych 30 dni możemy interpretować jako schemat Bernoulliego z parametrami 30, p, gdzie p to prawdopodobieństwo wystąpieńia trzęsienia ziemi w trakcie pojedynczego dnia. Liczbę p wyznaczamy z warunku zadania o średnio sześciu trzęsieniach ziemi miesięcznie: ze wzoru na wartość oczekiwaną rozkładu Bernoulliego, otrzymujemy $30p = 6$, czyli $p = 0.2$. Wobec tego, zmienną X możemy traktować jako zmienną o rozkładzie Bernoulliego z parametrami 7, 0.2 i szukane prawdopodobieństwo (a raczej jego pierwsze przybliżenie) to
$$\binom{7}{0}(0.2)^0(0.8)^7 + \binom{7}{1}(0.2)^1(0.8)^6 = 0.5767168.$$

2. Spróbujmy teraz, jako pojedynczą „jednostkę czasową” wziąć nie dzień, a godzinę. Przyjmijmy teraz, że w ciągu godziny może mieć miejsce co najwyżej jedno trzęsienie ziemi oraz że aktywność sejsmiczna w różnych godzinach rozwija się w sposób niezależny. Wówczas wydarzenia w ciągu 30 dni traktujemy jako schemat $30 \cdot 24 = 720$ prób Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu $p = 6/720 = 1/120$ (liczbę p ponownie wyznaczamy z warunku iż średnia schematu ma wynosić 6). Wobec tego, rozważana zmienna X ma rozkład Bernoulliego z parametrami $7 \cdot 24 = 168$, $1/120$, i szukane prawdopodobieństwo wynosi

$$\binom{168}{0}\left(\frac{1}{120}\right)^0\left(\frac{119}{120}\right)^{168}+\binom{168}{1}\left(\frac{1}{120}\right)^1\left(\frac{119}{120}\right)^{167}=0.5912554.$$

3. Rozważmy teraz ogólny przypadek i podzielmy dzień na n części. Jak wyżej, zakładamy, że w ciągu pojedynczej $1/n$-tej części dnia może mieć miejsce co najwyżej jedno trzęsienie ziemi oraz przyjmujemy odpowiednią niezależność. Wówczas liczba trzęsień w ciągu 30 dni ma rozkład Bernoulliego z parametrami $30n$, $6/(30n) = 1/(5n)$ (tak, by średnia wynosiła 6). Zatem rozkład X to $B(7n, 1/(5n))$. Przechodzimy teraz z n do nieskończoności: wówczas rozkład Bernoulliego zbiega do rozkładu $\mathrm{Pois}(7/5) = \mathrm{Pois}(1.4)$, a więc

$$\mathbb{P}(X \leq 1) = e^{-1.4}(1 + 1.4) = 0.5918327.$$

Powyższą liczbę przyjmujemy jako ostateczny wynik. □

Analogiczne rozumowanie może być użyte do badania liczby wojen w ciągu ustalonego okresu czasu; liczby pożarów w województwie mazowieckim w trakcie lipca i sierpnia; liczby wypadków drogowych na określonym obszarze w ciągu ustalonego tygodnia; itp.

Wyznaczymy teraz średnią oraz wariancję rozkładu Poissona z parametrem λ. Rachunki oprzemy bezpośrednio na odpowiednich definicjach. Załóżmy, że X ma taki rozkład; wówczas

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda.$$

Ponadto, $\mathbb{E}X^2 = \mathbb{E}X^2 - \mathbb{E}X + \mathbb{E}X = \mathbb{E}X(X-1) + \lambda$ oraz

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X(X-1) &= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\mathbb{P}(X = k)\\ &= e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k(k-1)\lambda^k}{k!} = \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} = \lambda^2.\end{aligned}$$

Stąd $\mathrm{Var}\, X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$.

Rozkład geometryczny. Załóżmy, że p jest ustaloną liczbą z przedziału $(0, 1]$. Zmienna X ma rozkład geometryczny z parametrem p (ozn. $X \sim \mathrm{Geom}(p)$), jeśli

$$\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1}p, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Rozkład geometryczny pojawia się w następującym kontekście. Rozważmy nieskończony schemat Bernoulliego o prawdopodobieństwie sukcesu p i niech X oznacza numer pierwszej próby, w której odnotowano sukces. Wówczas X ma rozkład geometryczny z parametrem p.

Przykład 4.21. Z urny zawierającej N kul białych i M kul czarnych losujemy kolejno po jednej kuli ze zwracaniem aż do momentu, gdy wyciągniemy czarną kulę. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że liczba losowań przekroczy 100.

Rozwiązanie. Rozważmy nieskończony schemat Bernoulliego, w którym próbą jest pojedyncze losowanie kuli, a sukcesem jest wyciągnięcie czarnej kuli. Wówczas X, liczba losowań, jest zmienną o rozkładzie geometrycznym z parametrem $M/(M+N)$. Szukane prawdopodobieństwo wynosi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X>100) &= \sum_{k=101}^{\infty}\mathbb{P}(X=k)=\sum_{k=101}^{\infty}\left(1-\frac{M}{M+N}\right)^{k-1}\frac{M}{M+N}\\ &=\left(1-\frac{M}{M+N}\right)^{100}=\left(\frac{N}{M+N}\right)^{100}.\end{aligned}$$ □

Wyznaczmy teraz wartość oczekiwaną i wariancję rozkładu geometrycznego. Zauważmy, że dla $x\in(-1,1)$ zachodzą tożsamości

$$\sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}=\left(\sum_{k=0}^{\infty}x^k\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}$$

oraz

$$\sum_{k=1}^{\infty}k(k-1)x^{k-2}=\left(\sum_{k=0}^{\infty}x^k\right)''=\frac{2}{(1-x)^3}.$$

Zatem, jeśli $X\sim\mathrm{Geom}(p)$, to

$$\mathbb{E}X=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot(1-p)^{k-1}p=\frac{p}{(1-(1-p))^2}=\frac{1}{p}$$

oraz

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}X=\mathbb{E}X^2-(\mathbb{E}X)^2 &= \mathbb{E}X(X-1)+\mathbb{E}X-(\mathbb{E}X)^2\\ &=\sum_{k=1}^{\infty}k(k-1)\cdot(1-p)^{k-1}p+\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}\\ &=\frac{2p(1-p)}{(1-(1-p))^3}+\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}\\ &=\frac{2-2p+p-1}{p^2}=\frac{1-p}{p^2}.\end{aligned}$$

4.6. **Wartość oczekiwana i wariancja sumy zmiennych losowych.** Celem tej części wykładu jest zastosowanie następujących, wyprowadzonych wcześniej równości: jeśli X_1, X_2, ..., X_n są zmiennymi losowymi posiadającymi odpowiednią całkowalność, to

$$\mathbb{E}(X_1+X_2+\ldots+X_n)=\mathbb{E}X_1+\mathbb{E}X_2+\ldots+\mathbb{E}X_n \tag{4.1}$$

oraz

$$\operatorname{Var}(X_1+X_2+\ldots+X_n)=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Var}X_k+2\sum_{1\le j<k\le n}\operatorname{Cov}(X_j,X_k). \tag{4.2}$$

Rozpocznijmy od następującego prostego przykładu.

Przykład 4.22. Rzucono n razy prawidłową kostką do gry. Obliczyć wartość oczekiwaną łącznej liczby wyrzuconych oczek.

Rozwiązanie. Oznaczmy przez X sumę wyrzuconych liczb oczek. Można próbować obliczyć średnią X bezpośrednio z definicji - jest to jednak bardzo żmudne podejście, gdyż wyznaczenie rozkładu zmiennej X jest trudnym zagadnieniem kombinatorycznym. Aby uniknąć tych problemów, rozbijmy zmienną X na sumę prostszych zmiennych, a następnie skorzystajmy ze wzoru (4.1). Szukane rozbicie otrzymujemy poprzez analizę poszczególnych rzutów. Mianowicie, dla $j = 1, 2, \ldots, n$, niech X_j oznacza liczbę oczek wyrzuconych w j-tym rzucie. Wówczas $X = X_1+X_2+\ldots+X_n$ oraz

$$\mathbb{E}X_j = 1 \cdot \mathbb{P}(X_j = 1) + 2 \cdot \mathbb{P}(X_j = 2) + \ldots + 6 \cdot \mathbb{P}(X_j = 6) = \frac{7}{2},$$

a więc $\mathbb{E}X = \mathbb{E}X_1 + \mathbb{E}X_2 + \ldots + \mathbb{E}X_n = n \cdot 7/2$. □

Przykład 4.23. Dziesięć dziewczynek i dziesięciu chłopców ustawia się losowo w pary. Obliczyć wartość oczekiwaną i wariancję liczby par utworzonych z samych dziewczynek.

Rozwiązanie. Aby odpowiednio określić przestrzeń probabilistyczną, rozważmy następujący sposób rozbicia na pary: najpierw dzieci ustawiają się w losową permutację $(d_1, d_2, \ldots, d_{20})$, a następnie d_1 ustawia się w parę z d_2, d_3 ustawia się w parę z d_4, ..., d_{19} ustawia się w parę z d_{20}. Innymi słowy, wskazaliśmy wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między ustawieniami w pary a permutacjami dzieci.

Niech X oznacza liczbę par utworzonych z samych dziewczynek. Jak wcześniej, wyznaczenie rozkładu zmiennej X jest zagadnieniem trudnym; wobec tego, wartość oczekiwaną oraz wariancję tej zmiennej obliczymy poprzez odpowiednie jej rozbicie. W tym celu, rozważmy

$$X_j = \begin{cases} 1 & \text{w } j\text{-tej parze są dwie dziewczynki,} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases} \qquad j = 1, 2, \ldots, 10.$$

Zachodzi równość $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_{10}$. Ponadto, bezpośrednio obliczamy, iż

$$\mathbb{E}X_j = \mathbb{P}(X_j = 1) = \frac{10 \cdot 9 \cdot 18!}{20!} = \frac{9}{38}$$

(istotnie: rozpoczynamy od ustawienia dwóch dziewczynek na miejscach $2j-1$ i $2j$, co można zrobić na $10 \cdot 9$ sposobów; na pozostałych 18 miejscach rozmieszczamy dzieci w sposób dowolny). Wobec tego,

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}X_1 + \mathbb{E}X_2 + \ldots + \mathbb{E}X_{10} = 10 \cdot \frac{9}{38} = \frac{45}{19}.$$

Aby obliczyć wariancję zmiennej X za pomocą wzoru (4.2), musimy znać odpowiednie wariancje i kowariancje stojące po prawej stronie. Zacznijmy od obserwacji iż dla $1 \leq j \leq n$, zmienna X_j^2 jest równa X_j; stąd $\mathbb{E}X_j^2 = \mathbb{E}X_j = 9/38$ i $\operatorname{Var} X_j = 9/38 - (9/38)^2 = 261/1444 \approx 0.18$.

Ustalmy $1 \leq j < k \leq 10$. Zmienna X_jX_k jest zmienną zero-jedynkową i jest równa jeden wtedy i tylko wtedy, gdy pary j oraz k składają się z dziewczynek. Zatem

$$\mathbb{E}X_jX_k = \mathbb{P}(X_jX_k = 1) = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 16!}{20!} = \frac{14}{323},$$

a więc $\mathrm{Cov}(X_j, X_k) = \frac{14}{323} - \left(\frac{9}{38}\right)^2 = -313/24548 \approx -0.013$. Stąd, na mocy (4.2),

$$\mathrm{Var}\, X \approx 10 \cdot 0.18 + 2 \cdot \binom{10}{2} \cdot (-0.013) = 0.63.$$

Liczba $\binom{10}{2}$ w powyższych obliczeniach to liczba składników w drugiej sumie po prawej stronie wzoru (4.2). $\square$

Przykład 4.24. Rzucamy monetą, dla której prawdopodobieństwo wyrzucenia orła wynosi p, aż do momentu wyrzucenia k orłów (łącznie, niekoniecznie pod rząd). Wyznaczyć wartość oczekiwaną liczby rzutów.

Rozwiązanie. Oznaczmy liczbę rzutów przez X. Następnie, dla $j = 1, 2, \ldots, k$, oznaczmy przez X_j liczbę rzutów między pojawieniem się $j-1$ i j-tego orła, wliczając rzut j-tego orła. Przykładowo, jeśli $k = 3$ oraz ciąg wyników to RRORORRRRRO, to $X_1 = 3$, $X_2 = 2$ oraz $X_3 = 6$:

$$\underbrace{RRO}_{3}\underbrace{RO}_{2}\underbrace{RRRRRO}_{6}.$$

Zwróćmy uwagę, iż zmienne X_1, X_2, $\ldots$, X_k to zmienne o rozkładzie geometrycznym z parametrem p: istotnie, każdą z nich możemy interpretować jako numer pierwszego rzutu w którym pojawi się orzeł - jeśli tylko przyjmiemy, że rzut, w którym wypadł poprzedni orzeł, ma numer zero. Wobec tego,

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}X_1 + \mathbb{E}X_2 + \ldots + \mathbb{E}X_k = \frac{k}{p}. \quad \square$$

Zadania

1. Pięć uczennic i pięciu uczniów bierze udział w teście; następnie tworzy się listę rankingową. Zakładamy, że żadne dwa wyniki nie mogą się powtórzyć. Niech X oznacza najwyższe miejsce osiągnięte przez uczennicę. Wyznaczyć rozkład X.

2. Pięć kartek ponumerowanych liczbami od 1 do 5 rozdano pięciu graczom A, B, C, D oraz E, po jednej kartce każdemu. Następnie, gracz A porównuje numer swojej kartki z odpowiednim numerem gracza B; jeśli numer A jest większy, wygrywa gracz A i w następnej rundzie porównuje swój numer z numerem gracza C. Jeśli numer gracza A jest większy, zostaje on zwycięzcą drugiej rundy i w następnej grze proównuje numery z graczem D. Końcowa runda (jeśli do niej dojdzie) polega na porównaniu numerów z graczem E. Niech X oznacza liczbę zwycięstw gracza A. Obliczyć rozkład X, jej średnią i wariancję.

3. Z urny zawierającej n kul ponumerowanych liczbami od 1 do n losujemy kolejno po jednej kuli ze zwracaniem aż do momentu wyciągnięcia tej samej kuli co w poprzednim losowaniu. Niech X oznacza liczbę losowań. Wyznaczyć rozkład zmiennej X, jej wartość oczekiwaną i wariancję.

4. Kij złamano w losowym miejscu. Niech X oznacza stosunek długości lewego kawałka do długości prawego kawałka. Wyznaczyć rozkład zmiennej X.

5. Wybieramy losowo niepusty podzbiór zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ (wybór każdego podzbioru jest tak samo prawdopodobny). Niech X oznacza moc wylosowanego podzbioru. Obliczyć $\mathbb{E}X$.

6. Każdy bok i każdą przekątną sześciokąta foremnego malujemy losowo na jeden z trzech kolorów. Wybór każdego koloru jest jednakowo prawdopodobny, kolorowania różnych odcinków są niezależne. Niech X oznacza liczbę jednobarwnych trójkątów o wierzchołkach będących wierzchołkami sześciokąta. Obliczyć wartość oczekiwaną zmiennej X.

7. Rzucamy kostką aż do momentu wypadnięcia wszystkich możliwych liczb oczek. Obliczyć wartość oczekiwaną liczby rzutów.

8. Liczby 1, 2, ..., 100 ustawiono losowo w ciąg $(a_1, a_2, \ldots, a_{100})$. Niech N będzie największą liczbą taką, że $a_1 < a_2 < \ldots < a_N$. Wyznaczyć rozkład zmiennej N oraz $\mathbb{E}N$.

9. Z urny zawierającej 15 kul białych i 5 kul czarnych losujemy 4 kule bez zwracania. Obliczyć wartość oczekiwaną liczby wylosowanych kul białych.

10. Jest N listów i N zaadaresowanych kopert z różnymi adresami. Każdy list odpowiada dokładnie jednemu adresowi i na odwrót. Włożono listy do kopert na chybił trafił, po jednym liście do każdej koperty. Niech X oznacza liczbę listów, które trafiły do właściwych kopert. Obliczyć wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej X.

11. Średnia liczba błędów na pojedynczej stronie skryptu wynosi 0.2. Wyznaczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że na następnej stronie będą co najmniej 2 błędy.

12. W 100 torebkach cukru umieszczono 200 oznakowanych kryształków. Wyznaczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że ustalona torebka zawiera co najmniej trzy oznakowane kryształki.

13. Do punktu badania jakości wody dostarczono 100 próbek. Prawdopodobieństwo tego, że w danej próbce znajdują się bakterie E. coli wynosi 0.1. W celu zaoszczędzenia na badaniach, próbki podzielono na 10 grup po dziesięć w każdej; następnie, w obrębie każdej grupy zmieszano wodę i przeprowadzono badanie. Jeśli wynik jest negatywny, wszystkie dziesięć próbek jest wolnych od bakterii; jeśli natomiast wynik jest pozytywny, przeprowadza się dodatkowe 10 badań, dla każdej próbki z osobna. Niech X oznacza liczbę przeprowadzonych badań. Obliczyć $\mathbb{E}X$.

14. Na terytorium Polski odnotowuje się średnio 3 poważne pożary lasów w ciągu lipca. Wyznaczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że

a) w następnym lipcu nie będzie pożarów.

b) w następnym lipcu będzie parzysta liczba pożarów.

15. W pojemniku znajdują się dwie monety: na pierwszej orzeł wypada z prawdopodobieństwem 0.6, na drugiej - z prawdopodobieństwem 0.3. Losujemy monetę i wykonujemy nią rzut. Możemy postawić x zł ($0 \leq x \leq 10$) na to, że wypadnie orzeł; w przypadku gdy tak się stanie, zyskujemy x zł, w przeciwnym razie tracimy x zł.

a) Jaka jest wartość oczekiwana wygranej? Jaka jest optymalna strategia?

b) Załóżmy, że za dodatkowe $c \geq 0$ złotych możemy kupić informację która moneta została wylosowana (na tej podstawie tej informacji możemy wybrać wysokość stawki). Dla jakich c opłaca się przyjąć tę ofertę? Jaka jest optymalna strategia?

16. Załóżmy, że X jest zmienną losową przyjmującą wartości w zbiorze liczb całkowitych nieujemnych. Wykazać, że

$$\mathbb{E}X = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq n)$$

oraz

$$\mathbb{E}X^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\mathbb{P}(X > n).$$

Zastanowić się nad uogólnieniem tych wzorów na przypadek $\mathbb{E}X^p$, $0 < p < \infty$.

17. Dane są liczby całkowite dodatnie $m \leq n$. Ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ losujemy m liczb. Obliczyć wartość oczekiwaną różnicy pomiędzy największą a najmniejszą z tych liczb.

5. Elementy statystyki opisowej

W praktyce nie są nam znane ani wszystkie wartości ani nawet rozkłady zmiennych losowych. Przykładowo, analitycy chcący poznać rozkład miesięcznych wydatków na rozrywkę wśród mieszkańców Warszawy, nie mają możliwości zebrania oraz przeanalizowania danych dotyczących każdego mieszkańca i muszą bazować na wynikach ankiety przeprowadzonej na losowej próbce mieszkańców stolicy. Również fizycy czy inżynierowie dokonując obarczonego losowym błędem pomiaru pewnej wielkości fizycznej, nie znają dokładnego rozkładu błędu (który może być traktowany jako cecha charakterystyczna urządzenia pomiarowego), dlatego często dokonują wielokrotnych pomiarów tej samej wielkości, aby na ich podstawie uzyskać jej jak najlepsze przybliżenie. W obu sytuacjach informacja, która jest dostępna, to tzw. próbka, czyli ciąg liczb $X_1, X_2, \ldots, X_n$ z którego chcielibyśmy odzyskać informacje na temat interesującej nas zmiennej losowej X. Sposobami pobierania próbek oraz wnioskowania na ich podstawie zajmuje się statystyka matematyczna, nie będziemy więc w tym momencie zgłębiać tego zagadnienia. Ograniczymy się jedynie do informacji, że wiele metod bazuje na charakterystykach liczbowych próbki, analogicznych do zdefiniowanych w poprzednich rozdziałach charakterystyk zmiennych losowych.

Zauważmy, że z próbką X_1, X_2, $\ldots$, X_n możemy związać rozkład prawdopodobieństwa na prostej (tzw. rozkład empiryczny), zdefiniowany jako

$$\mu_n(A) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_{X_i}(A) = \frac{|\{i\colon X_i \in A\}|}{n}, \tag{5.1}$$

informujący nas jaka część wszystkich obserwacji znajduje się w zbiorze A. Intuicyjnie można się spodziewać, że rozkład ten (przynajmniej dla odpowiednio dużych n) powinien dość dobrze przybliżać rozkład interesującej nas zmiennej losowej (zjawisko to nosi miano prawa wielkich liczb; nie będziemy tu głębiej wchodzić w to zagadnienie). Analogicznie, charakterystyki liczbowe rozkładu μ możemy uznać za dostępne nam przybliżenia odpowiednich charakterystyk nieznanego rozkładu zmiennej losowej. Zaznaczmy tylko, iż coraz lepsze przybliżenia uzyskuje się dla dużych wartości n; wobec tego, wnioski wyciągane z konkretnej próbki są bardziej wiarygodne/prawdopodobne, jeśli próbka jest liczna.

Omówimy teraz pokrótce pojęcia, które pojawiają się w powyższym kontekście. Zacznijmy od pojęcia szeregu rozdzielczego. Obiekt ten uzyskujemy poprzez podzielenie danych statystycznych na pewne rozłączne kategorie i podanie liczebności przypadającej na każdą z tych kategorii. Spójrzmy na następujący przykład.

Przykład 5.1. Zmierzono wzrost (w centymetrach) 20 studentów matematyki, uzyskując liczby 160, 164, 169, 171, 172, 174, 174, 175, 175, 176, 176, 176, 177, 177, 180, 182, 182, 184, 185, 190. Sporządźmy szereg rozdzielczy, w którym kategorią jest posiadanie ustalonego wzrostu (litera W poniżej oznacza „Wzrost”, a L to „Liczebność”):

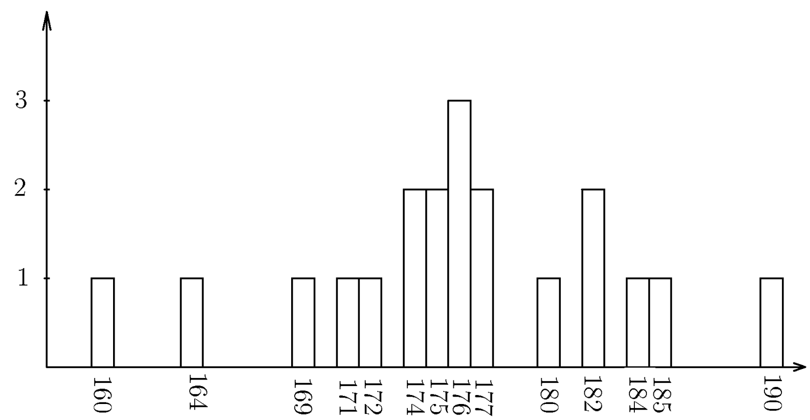
W	160	164	169	171	172	174	175	176	177	180	182	184	185	190
L	1	1	1	1	1	2	2	3	2	1	2	1	1	1

Możemy też rozważyć inny szereg rozdzielczy, w którym grupujemy studentów o wzroście $160-164$ cm, $165-169$ cm, itd. Otrzymany szereg możemy zilustrować w tabeli:

Wzrost	160 -164	165 -169	170 -174	175 -179	180 -184	185 -189	190 -194
Liczebność	2	1	4	7	4	1	1

Przejdźmy teraz do pojęcia histogramu. Jest to wygodny sposób ilustracji rozkładu empirycznego i polega na narysowaniu na wykresie pewnego odpowiadającego ciągu prostokątów. Boki tych prostokątów są wyznaczone przez odpowiadające przedziały klasowe (kategorie szeregu rozdzielczego) i liczność części próbki do nich wpadających.

Przykład 5.2. Dane z poprzedniego przykładu możemy zilustrować na następującym histogramie. Na osi x wyróżniamy przedział od 160 do 190 i dzielimy go na jednostkowe podprzedziały: w tym momencie, decydujemy się na przedziały klasowe postaci $[k, k+1)$. Nad każdym takim przedziałem budujemy prostokąt o wysokości równej liczbie studentów o wzroście k: por. Rysunek 3.



Rysunek 3. Histogram z Przykładu 5.1, o przedziale klasowym postaci $[k, k+1)$

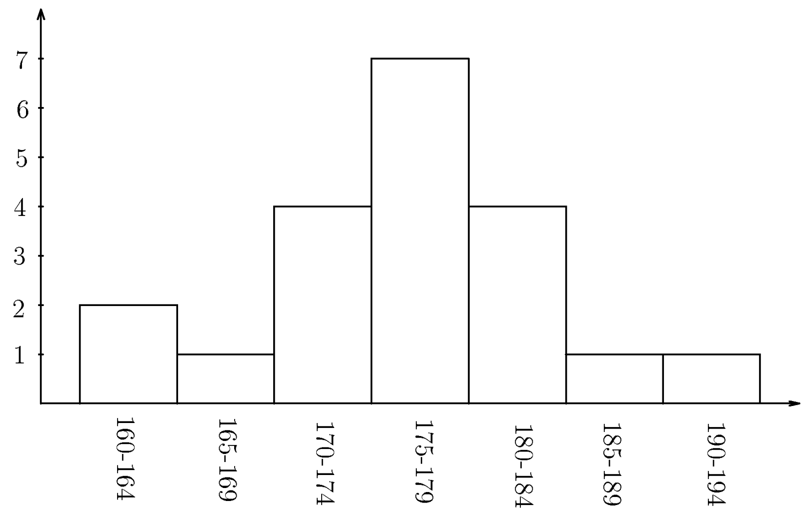
Możemy też zmniejszyć nieco „rozdzielczość" histogramu i jako przedziały klasowe wziąć przedziały o szerokości 5 (por. drugi szereg rozdzielczy powyżej): $[160, 164]$, $[165, 169]$, $[170, 174]$, $[175, 179]$, $[180, 184]$, $[185, 189]$ i $[190, 194]$; ponownie, nad każdym takim przedziałem budujemy prostokąt o wysokości równej liczbie studentów o wzroście mieszczącym się w tym przedziale: por. Rysunek 4 poniżej.

Kolejnym pojęciem, które wprowadzimy, jest tzw. *kwantyl* próbki.

Definicja 5.1. Kwantylem rzędu p z próbki $X_1, \ldots, X_n$ nazywamy dowolną liczbę x_p, taką że

$$\frac{1}{n}|\{n : X_n \leq x_p\}| \geq p$$
$$\frac{1}{n}|\{n : X_n \geq x_p\}| \geq 1 - p.$$

Kwantyl rzędu $1/4$ nazywa się czasem *pierwszym kwartylem* bądź *dolnym kwartylem*. Kwantyl rzędu $1/2$ nazywamy także *drugim kwartylem* lub *medianą*. Wreszcie, kwantyl rzędu $3/4$ nazywamy też *trzecim kwartylem* bądź *górnym kwartylem*.



RYSUNEK 4. Histogram z Przykładu 5.1, o przedziale klasowym postaci $[k, k+5)$, $5|k$

Intuicyjnie, mediana to liczba o tej własności, że na lewo od niej znajduje się połowa danych oraz na prawo od niej znajduje się połowa danych. Kwantyl rzędu p odpowiada liczbie, na lewo od której znajduje się p-ta część danych (a na prawo znajduje się $(1-p)$-ta część próbki). Spójrzmy na przykład.

Przykład 5.3. Rozważmy sytuację z poprzedniego przykładu. Medianą podanej próbki jest liczba 176. Istotnie, mamy $|\{n : X_n \leq 176\}| = 12$ oraz $|\{n : X_n \geq 176\}| = 11$, skąd

$$\frac{1}{20}|\{n : X_n \leq 176\}| \geq \frac{1}{2} \quad \text{oraz} \quad \frac{1}{20}|\{n : X_n \geq 176\}| \geq \frac{1}{2}.$$

Następnie, spróbujmy wyznaczyć kwantyl rzędu 1/3. Z grubsza rzecz biorąc, powinna to być liczba o tej własności, że na lewo od niej stoi 1/3 danych, a na prawo od niej stoi 2/3 danych. Mamy $1/3 \cdot 20 = 6\frac{2}{3}$, patrzymy więc na siódmą liczbę w ciągu: jest nią 174. Jest to szukany kwantyl: mamy

$$\frac{1}{20}|\{n : X_n \leq 174\}| = \frac{7}{20} \geq \frac{1}{3}, \qquad \frac{1}{20}|\{n : X_n \geq 174\}| = \frac{15}{20} \geq \frac{2}{3}.$$

Uwaga 5.1. W obu powyższych obliczeniach, liczb 176 oraz 174 nie można zmienić. Jednakże często istnieje nieskończenie wiele liczb spełniających definicję kwantyla (i wówczas nie jest on wyznaczony jednoznacznie); w takiej sytuacji, zazwyczaj wyróżnia się najmniejszą z dopuszczalnych liczb: wówczas kwantylem jest jedną z liczb X_i. Przykładowo, rozważmy powyższy przykład i spróbujmy wyznaczyć kwantyl rzędu 1/5. Wówczas każda liczba x z przedziału $[171, 172)$ spełnia

$$\frac{1}{20}|\{n : X_n \leq x\}| = \frac{1}{5}, \qquad \frac{1}{20}|\{n : X_n \geq x\}| = \frac{4}{5}.$$

Wobec niejednoznaczności, przyjmujemy, iż kwantyl wynosi 171.

Zdefiniujemy teraz średnią i wariancję z próbki.

Definicja 5.2. Średnią z próbki $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nazywamy liczbę

$$m = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n},$$

czyli średnią arytmetyczną liczb $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Definicja 5.3. Wariancją z próbki $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nazywamy liczbę

$$s = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \Big(X_i - m \Big)^2,$$

gdzie m jest średnią z próbki.

Uwaga 5.2. Tak jak w przypadku kwantyli, średnia i wariancja z próbki to po prostu wartość oczekiwana i wariancja rozkładu empirycznego. W praktyce (np. w popularnych arkuszach kalkulacyjnych) do przybliżania wariancji zmiennej losowej na podstawie próbki często używa się raczej wyrażenia

$$\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \Big(X_i - m \Big)^2,$$

ponieważ jednak wyjaśnienie dlaczego w mianowniku pojawia się liczba $(n-1)$ wymagałoby wprowadzenia dodatkowego aparatu statystyki matematycznej, nie będziemy wnikać w szczegóły.

Przykład 5.4. Rozważmy powyższy przykład. Średnią z zadanej dwudziestoelementowej próbki jest liczba $m = (160 + 164 + 169 + 171 + 172 + 174 + 174 + 175 + 175 + 176 + 176 + 176 + 177 + 177 + 180 + 182 + 182 + 184 + 185 + 190)/20 = 175.95$, a odpowiednią wariancją z próbki jest liczba 46.5475.

Ostatnim pojęciem, którym się zajmiemy, to tzw. dominanta.

Definicja 5.4. Dominantą (wartością modalną, modą lub wartością najczęstszą) próbki X_1, X_2, $\ldots$, X_n nazywamy wartość, która powtarza się najczęściej. Tak więc w powyższym przykładzie, dominantą jest liczba 176.

Pojęcie dominanty jest o tyle wygodne, że ma ono sens także wtedy, gdy wartości próbek nie są liczbowe. Przykładowo, jeśli dana jest próbka owoców: (jabłko, jabłko, gruszka, truskawka, wiśnia, wiśnia, jabłko), to dominantą jest jabłko.

Widzimy więc, iż wprowadziliśmy wyżej trzy wielkości mierzące ,,przeciętną" wartość próbki. Jest to mediana, średnia oraz moda. Czasami w literaturze wielkości tego typu nazywamy *miarami tendencji centralnej*.

Zadania

1. Maksymalne temperatury w dniach $11-20$ maja wynosiły odpowiednio 20, 17, 16, 16, 17, 13, 18, 20, 23 oraz 25 stopni Celsjusza. Odpowiednie temperatury minimalne w tych dniach to 8, 9, 7, 6, 11, 9, 11, 9, 10, 11 stopni. Wyznaczyć średnie oraz wariancje maksymalnej i minimalnej temperatury.

2. Stan Oficjalnych Aktywów Rezerwowych w 2002 roku (w mld USD) wynosił

Miesiąc	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Aktywa	26	26	27	27	28	28	29	29	29	29	30	30

Wyznaczyć wartość średnią, wariancję, medianę oraz dolny kwartyl próby.

3. Dnia 4 siepnia 1997 roku, RPP ustaliła wysokość stopy kredytu lombardowego na 27%. W roku 1998 wartość ta była zmieniana czterokrotnie: 21 maja na 26%, 17 lipca na 24%, 29 października na 22% i 10 grudnia na 20%. Zaproponować metodę obliczenia średniej stopy lombardowej w roku 1998.

6. Grafy stochastyczne

Grafy stochastyczne stanowią wygodne narzędzie do ilustrowania i badania pewnego typu wieloetapowych doświadczeń losowych, tzw. łańcuchów Markowa. Załóżmy, że (V, E) jest pełnym grafem skierowanym o co najwyżej przeliczalnym zbiorze wierzchołków: zbiór V oznacza tu zbiór wierzchołków (bądź stanów, lub węzłów), zaś E jest zbiorem wszystkich skierowanych krawędzi o końcach w V (zatem E możemy - i będziemy - utożsamiać ze zbiorem $V \times V$). Przypuśćmy dalej, że P jest funkcją zadaną na zbiorze $V \times V$ taką, że

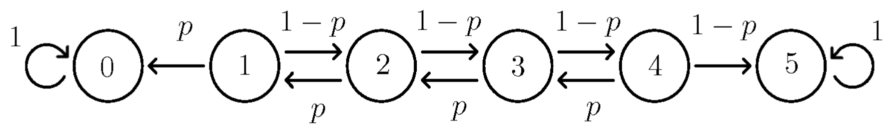
$$\begin{aligned} P(j,k) &\geq 0 \qquad && \text{dla wszystkich } j,\, k \in V, \\ \sum_{k \in V} P(j,k) &= 1 \qquad && \text{dla wszystkich } j \in V. \end{aligned}$$

Liczbę $P(j,k)$ będziemy czasem oznaczać p_{jk} i nazywać *prawdopodobieństwem przejścia w jednym kroku ze stanu j do stanu k*. Czasem wygodnie jest przedstawić funkcję przejścia P w postaci macierzy $[p_{jk}]_{j,k \in V}$ - obiekt ten, z drobnym nadużyciem notacji, będziemy także oznaczać literą P i nazywać *macierzą przejścia w jednym kroku*. Macierz P jest macierzą stochastyczną: powyższe warunki są równoważne temu, iż wyrazy P są nieujemne, a suma w każdym wierszu wynosi 1.

Przykład 6.1. Dwie osoby A, B grają w orła i reszkę monetą, dla której prawdopodobieństwo wypadnięcia orła wynosi p. W każdym ruchu, gracz A rzuca monetą; jeśli wypadnie orzeł, płaci 1 zł graczowi B; w przeciwnym razie, otrzymuje 1 zł od gracza B. Gra kończy się, gdy jeden z graczy nie ma pieniędzy (mówimy wówczas o ruinie tego gracza). Zakładając, że na początku gracze A i B mieli odpowiednio 2 i 3 złote, obliczyć prawdopodobieństwo że gra zakończy się ruiną gracza A.

Rozwiązanie. Opiszemy najpierw powyższe zagadnienie w terminach grafów stochastycznych. W chwili n, stanem układu będzie kapitał gracza A po n rzutach (jeśli gra zakończyła się przed n-tym rzutem, przyjmujemy, że kapitał A jest taki sam jak w ostatniej grze). Wobec tego, $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Aby wyznaczyć P, przyjrzyjmy się, w jaki sposób układ ewoluuje w pojedynczej grze. Jeśli gracz A posiada k złotych (gdzie $k \in \{1, 2, 3, 4\}$), to wskutek pojedynczej gry jego kapitał albo zmniejsza się o 1 z prawdopodobieństwem p, albo zwiększa o 1 z prawdopodobieństwem $1 - p$. Innymi słowy, ze stanu k możemy pójść tylko do $k - 1$ bądź do $k + 1$ (z odpowiednimi prawdopodobieństwami p, $1 - p$), wszystkie inne prawdopodobieństwa przejścia są zerowe. Jeśli zaś $k \in \{0, 5\}$, to gra jest zakończona i układ pozostanie w tym stanie: innymi słowy, $p_{00} = 1$ oraz $p_{55} = 1$, a wszystkie pozostałe prawdopodobieństwa przejścia są zerowe (czasem stany takiego typu będziemy nazywać pochłaniającymi bądź brzegowymi). Kluczowa własność badanego doświadczenia jest następująca: w każdym momencie czasu, dalsza ewolucja układu zależy tylko od jego położenia w chwili obecnej i nie odwołuje się do jego zachowania w poprzednich krokach. Jest to tzw. własność Markowa i w dalszym ciągu tego wykładu będziemy zakładać, iż opisane procesy ją posiadają.

Powróćmy do badanego doświadczenia. Opisaną wyżej funkcję przejścia możemy zilustrować za pomocą odpowiadającego grafu (por. Rysunek 5 poniżej). Węzłami grafu są liczby 0, 1, 2, 3, 4, 5, dla wygody oraz przejrzystości rysunku zaznaczyliśmy tylko krawędzie odpowiadające dodatnim prawdopodobieństwom przejścia.



Rysunek 5. Graf stochastyczny opisujący Przykład 6.1

Alternatywnie, funkcję P można zapisać w postaci macierzy stochastycznej

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & 1-p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 1-p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 & 1-p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p & 0 & 1-p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Przechodzimy teraz do polecenia zawartego w treści Przykładu. Zgodnie z założeniami, w chwili początkowej układ znajduje się w stanie 2, a interesuje nas prawdopodobieństwo zdarzenia $C = \{\text{układ dojdzie kiedyś do stanu } 0\}$. Podstawowym narzędziem przy badaniu tego typu zagadnień jest rozważenie ogólniejszego pytania, w którym *układ startuje z dowolnego ustalonego stanu.* Dla dowolnego $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, niech p_k oznacza prawdopodobieństwo tego, że układ dojdzie kiedyś do 0 pod warunkiem, że w chwili początkowej znajduje się w stanie k. W jakim celu rozważamy to ogólniejsze zagadnienie? Otóż, jak się za chwilę okaże, liczby p_k spełniają pewien układ równań, który można prosto rozwiązać (co w szczególności prowadzi nas do żądanej wartości p_2).

Rozumowanie, które się za chwilę pojawi, jest bardzo podobne do tego które prezentowaliśmy przy okazji błądzenia po liczbach całkowitych (jak czytelnik z pewnością zauważył, badane wyżej zagadnienie można interpretować jako takie błądzenie, zatrzymane w chwili dojścia do liczb 0 bądź 5). Zacznijmy od trywialnego spostrzeżenia iż $p_0 = 1$ (już w chwili początkowej jesteśmy w żądanym węźle) oraz $p_5 = 0$ (stan 5 jest pochłaniający: nigdy go nie opuścimy, w szczególności nigdy nie dojdziemy do stanu 0). Ustalmy teraz dowolną liczbę $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ i spójrzmy na ewolucję po jednym kroku. Układ może przejść albo do stanu $k - 1$, albo do $k + 1$. Ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite,

$$\begin{aligned} p_k &= \mathbb{P}(C|\text{układ startuje z } k) \\ &= \mathbb{P}(C|\text{układ przeszedł z } k \text{ do } k-1)\mathbb{P}(\text{układ przeszedł z } k \text{ do } k-1) \\ &\quad + \mathbb{P}(C|\text{układ przeszedł z } k \text{ do } k+1)\mathbb{P}(\text{układ przeszedł z } k \text{ do } k+1). \end{aligned}$$

Mamy $\mathbb{P}(\text{układ przeszedł z } k \text{ do } k-1) = p$, $\mathbb{P}(\text{układ przeszedł z } k \text{ do } k+1) = 1-p$. Ponadto, zauważmy, że $\mathbb{P}(C|\text{układ przeszedł z } k \text{ do } k-1) = p_{k-1}$; istotnie, w informacji, iż układ przeszedł z k do $k-1$ ważne jest tylko to, że w chwili obecnej znajduje się on w stanie $k-1$. Podobnie uzyskujemy równość $\mathbb{P}(C|\text{układ przeszedł z } k \text{ do } k+1) = p_{k+1}$, a zatem powyższa równość przybiera postać

$$p_k = pp_{k-1} + (1-p)p_{k+1}.$$

Wobec tego, widzimy, iż ciąg $(p_k)_{k=0}^5$ spełnia układ równań

$$\begin{cases} p_0 = 1, \\ p_1 = pp_0 + (1-p)p_2, \\ p_2 = pp_1 + (1-p)p_3, \\ p_3 = pp_2 + (1-p)p_4, \\ p_4 = pp_3 + (1-p)p_5, \\ p_5 = 0. \end{cases}$$

Rozwiązując ten układ, otrzymujemy

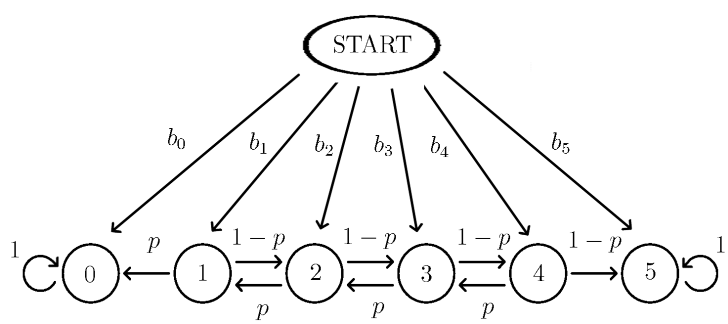
$$p_2 = \frac{p^2(1-p+p^2)}{p^4 - 2p^3 + 4p^2 - 3p + 1}$$

oraz $p_1 = p + (1-p)p_2$, $p_3 = pp_2/(1-p+p^2)$, $p_4 = p^2p_2/(1-p+p^2)$. □

Rozważmy teraz następującą modyfikację poprzedniego przykładu.

Przykład 6.2. W puli umieszcza się 5 złotych i rzuca się kostką, dla której prawdopodobieństwo uzyskania k oczek wynosi b_{k-1}. Jeśli na kostce wypadło k oczek, gracz A otrzymuje $k-1$ złotych, a gracz B - $6-k$ złotych, $k = 1, 2, \ldots, 6$. Następnie, rozgrywany jest ciąg gier jak w poprzednim przykładzie. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że gra zakończy się ruiną gracza A?

Rozwiązanie. Widzimy, iż gra składa się z dwóch etapów: losowania kapitałów oraz właściwej gry. W opisie tego doświadczenia, wygodnie jest wprowadzić dodatkowy stan ,,START", który będzie pozwalał na uwzględnienie pierwszego etapu. Jak wcześniej, pozostałe stany będą odpowiadały kapitałowi gracza A. Tak więc $V = \{START, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ i układ w chwili początkowej znajduje się w węźle ,,START". W pierwszej chwili, przemieszcza się do jednego ze stanów $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, w zależności od tego, ile monet trafiło do gracza A. Odpowiednie prawdopodobieństwo przejścia wynosi b_k, $k = 0, 1, 2, \ldots, 5$. Graf opisujący dynamikę systemu jest więc następujący (ponownie, pomijamy krawędzie o zerowych prawdopodobieństwach):



Rysunek 6. Graf stochastyczny opisujący Przykład 6.2

Innymi słowy, macierz przejścia ma postać

$$P = \begin{bmatrix} 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 1-p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 & 1-p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p & 0 & 1-p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p & 0 & 1-p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dalsza część rozwiązania przebiega w sposób analogiczny do poprzedniego przykładu. Wprowadzamy liczby p_{START}, p_0, p_1, $\ldots$, p_5 i widzimy, że interesująca nas wielkość p_{START} spełnia zaś równość $p_{START} = b_0p_0 + b_1p_1 + b_2p_2 + b_3p_3 + b_4p_4 + b_5p_5$; z drugiej zaś strony, liczby p_0 - p_5 spełniają ten sam układ równań co w poprzednim przykładzie, a więc wystarczy podstawić uzyskane wyżej wzory na te prawdopodobieństwa. □

Rozważmy teraz nieco inną modyfikację Przykładu 6.1.

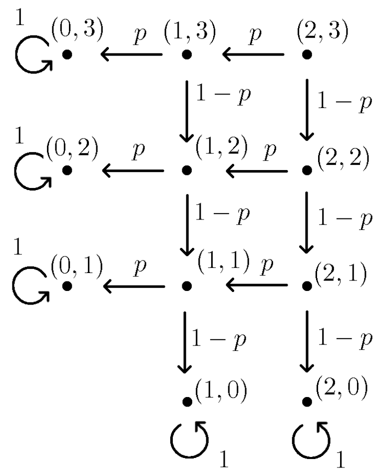
Przykład 6.3. W chwili początkowej, gracz A ma 2 złote a gracz B ma 3 złote. Gracz A wykonuje ciąg rzutów monetą, dla której prawdopodobieństwo wypadnięcia orła wynosi p. Jeśli wypadnie orzeł, A odkłada złotówkę do puli; w przeciwnym razie, gracz B odkłada złotówkę do puli. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że gra zakończy się ruiną gracza A?

Rozwiązanie. Spójrzmy na przestrzeń stanów opisujących badane doświadczenie. Poprzednie przykłady sugerują, aby jako stan wziąć kapitał gracza A; wobec tego, narzuca się przyjęcie $V = \{0, 1, 2\}$. Zwróćmy jednak uwagę na to, że wówczas nie możemy zastosować powyższej argumentacji, gdyż nie jest spełniona własność Markowa. Istotnie, wiedząc, że w danej chwili układ jest w stanie 2, nie wiemy, czy gra dalej się toczy, czy nie (nie mamy żadnej informacji o kapitale gracza B). W związku z tym, nie ma na przykład sensu mówić o wielkości p_{22}: prawdopodobieństwo to jest jedynką gdy gracz B już zbankrutował, oraz wynosi $1-p$ jeśli gracz B posiada niezerową liczbę złotych.

Aby pokonać tę trudność, należy odpowiednio wzbogacić przestrzeń stanów. Jako zbiór V weźmy zbiór *par* (k, ℓ), gdzie k, ℓ oznaczają aktualne kapitały graczy A i B. Widzimy więc, że zbiór stanów jest aż jedenastoelementowy:

$$V = \{(2,3), (2,2), (2,1), (2,0), (1,3), (1,2), (1,1), (1,0), (0,3), (0,2), (0,1)\}. \tag{6.1}$$

Tym razem, łatwo sprawdzić, że własność Markowa jest spełniona, a więc możemy stosować powyższą maszynerię. Jednakże ceną, jaką za to płacimy, jest stosunkowo duża moc zbioru V. Ze względu na to, możemy się spodziewać komplikacji obliczeń związanych z analizą niniejszego przykładu. Zacznijmy od opisu dynamiki układu, która jest stosunkowo prosta. Każdy stan postaci $(k, 0)$ bądź $(0, \ell)$ jest pochłaniający; ponadto, ze stanu (k, ℓ), k, $\ell \geq 1$, wędrujemy albo do $(k-1, \ell)$ (z prawdopodobieństwem p), albo do $(k, \ell - 1)$ (z prawdopodobieństwem $1-p$). Funkcję przejścia wygodnie jest zilustrować za pomocą grafu (por. Rysunek 7 poniżej). Dla pełności opisu, przedstawiamy też odpowiadającą macierz przejścia, chociaż tym razem jest to obiekt nieco bardziej złożony i nie tak bardzo czytelny (jest to macierz wymiaru 11×11, jej kolejne wiersze/kolumny odpowiadają stanom uporządkowanym zgodnie z równością (6.1); przykładowo, wyrazy w pierwszym wierszu odpowiadają



Rysunek 7. Graf stochastyczny opisujący Przykład 6.3

przejściom w jednym kroku ze stanu $(2,3)$ do $(2,3)$, $(2,2)$, $(2,1)$, $(2,0)$, itd.):

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1-p & 0 & 0 & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & 0 & 0 & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-p & 0 & 0 & p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-p & 0 & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-p & 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-p & 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wprowadźmy teraz, dla $k \in V$, liczby

$$p_k = \mathbb{P}(\text{gracz } A \text{ się zrujnuje} \,|\, \text{układ startuje z } k).$$

Rzecz jasna, zachodzą równości $p_{(2,0)} = p_{(1,0)} = 0$ oraz $p_{(0,3)} = p_{(0,2)} = p_{(0,1)} = 1$. Ponadto, mamy

$$\begin{cases} p_{(2,3)} &= (1-p)p_{(2,2)} + pp_{(1,3)}, \\ p_{(2,2)} &= (1-p)p_{(2,1)} + pp_{(1,2)}, \\ p_{(2,1)} &= (1-p)p_{(2,0)} + pp_{(1,1)}, \\ p_{(1,3)} &= (1-p)p_{(1,2)} + pp_{(0,3)}, \\ p_{(1,2)} &= (1-p)p_{(1,1)} + pp_{(0,2)}, \\ p_{(1,1)} &= (1-p)p_{(1,0)} + pp_{(0,1)}. \end{cases}$$

Rozwiązując ten układ równań, dostajemy odpowiedź:

$$p_{(2,3)} = p^2(6 - 8p + 3p^2). \quad \square$$

Jak już czytelnik z pewnością zauważył, ważną rolę przy badaniu zachowania zagadnień związanych z grafami stochastycznymi gra odpowiedni dobór przestrzeni stanów. W szczególności, w wielu problemach sprytny wybór zbioru V pozwala na znaczne uproszczenie rachunków. Spójrzmy na następujący przykład.

Przykład 6.4. Rzucamy nieskończenie wiele razy kostką. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że ciąg 16 pojawi się wcześniej niż ciąg 66?

Rozwiązanie. Pierwsze pytanie które tu się pojawia, dotyczy wyboru odpowiedniej przestrzeni stanów. Po chwili zastanowienia narzuca się pomysł, aby kodować ostatnie dwa wyniki. Ściślej, można rozważyć zbiór $\{START, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cup \{(k, \ell) : k, \ell \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$. Układ zaczyna ze sztucznego stanu START, następnie wędruje do stanu odpowiadającego za pierwszy rzut, a następnie odwiedza stany odpowiadające dwóm ostatnim rzutom. Wybór ten prowadzi jednak do bardzo skomplikowanej analizy, jako że zbiór V liczy 43 elementy.

Chwila zastanowienia prowadzi do następującego uproszczenia. Wprowadźmy, jak wyżej, sztuczny stan START. W pierwszym rzucie może wypaść 1, 2, 3, 4, 5 lub 6; zwróćmy uwagę, iż jeśli wypadnie 2, 3, 4 lub 5, to z punktu widzenia zagadnienia badanego w zadaniu, o tym rzucie możemy zapomnieć: innymi słowy, *pozostajemy w stanie START z prawdopodobieństwem* 4/6. Z drugiej strony, stany 1 oraz 6 są istotne i wrzucamy je do przestrzeni V.

Przypuśćmy teraz, że układ znalazł się w stanie 1. Jeśli teraz wypadnie 6, to otrzymujemy badaną konfigurację 16 (którą umieszczamy w zbiorze stanów). Jeśli wypadnie 2, 3, 4 lub 5 - możemy zapomnieć o całej ewolucji układu i wracamy do stanu START. Wreszcie, jeśli wypadnie 1, to pozostajemy w stanie 1.

Analiza stanu 6 jest analogiczna: jeśli wypadnie 1 - przesuwamy się do stanu 1. Jeśli wypadnie 2, 3, 4 lub 5 - przesuwamy się na START; wreszcie, jeśli wypadnie 6, otrzymujemy istotną konfigurację 66, którą umieszczamy w zbiorze V.

Opis funkcji przejścia kończymy spostrzeżeniem, że stany 16 oraz 66 są pochłaniające: istotnie, jeśli pojawi się jedna z tych konfiguracji, dalsze rzuty kostką nie wnoszą już niczego do ewolucji systemu. Jak łatwo zauważyć, opisany wyżej proces posiada własność Markowa i można stosować powyższe rozumowanie.

Wskutek powyższej analizy zbiór V uległ znacznemu uproszczeniu: jest on równy $\{START, 1, 6, 16, 66\}$, a odpowiadającą funkcję przejścia ilustruje graf na Rysunku 8 poniżej. Równoważnie, możemy napisać macierz przejścia, która jest równa

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

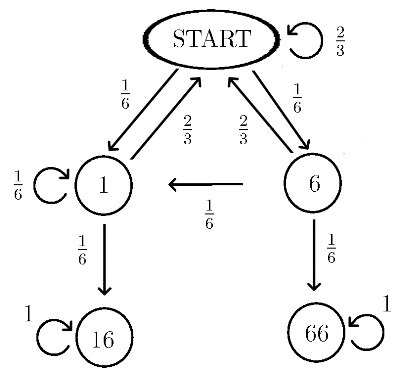
W celu analizy problemu z przykładu, wprowadźmy liczby

$$p_k = \mathbb{P}(\text{układ dojdzie do stanu 16 wcześniej niż do 66} \,|\, \text{układ startuje z } k).$$

Odnotujmy najpierw oczywiste równości $p_{16} = 1$, $p_{66} = 0$. Ponadto, mamy

$$\begin{cases} p_{START} & = \frac{2}{3}p_{START} + \frac{1}{6}p_1 + \frac{1}{6}p_6, \\ p_1 & = \frac{2}{3}p_{START} + \frac{1}{6}p_1 + \frac{1}{6}p_{16}, \\ p_6 & = \frac{2}{3}p_{START} + \frac{1}{6}p_1 + \frac{1}{6}p_{66}. \end{cases}$$

Rozwiązując ten układ, dostajemy odpowiedź $p_{START} = 7/12$. □



Rysunek 8. Graf stochastyczny opisujący Przykład 6.4

Omówimy teraz w abstrakcyjny sposób nieco inny typ zagadnień. Rozważmy błądzenie po grafie stochastycznym (V, E) o niepustym zbiorze stanów pochłaniających i zastanówmy się nad średnim takiego błądzenia. Dla dowolnego $k \in V$ i dowolnej trasie błądzenia startującej z k, niech τ oznacza jej długość; widzimy, że τ jest zmienną losową i zachodzi wzór

$$t_k = \mathbb{E}\tau = \sum_{n=0}^{\infty} n\mathbb{P}(\tau = n) = \sum_{n=1}^{\infty} n\mathbb{P}(\tau = n).$$

Przyjmijmy najpierw, że dla wszystkich k zachodzi nierówność $t_k < \infty$ (a więc w szczególności $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$).

Jeśli stan k jest pochłaniający, to wówczas τ jest zmienną skoncentrowaną w zerze, a więc $t_k = \mathbb{E}\tau = 0$. Jeśli zaś k nie jest pochłaniający, spójrzmy na ewolucję systemu po jednym kroku; korzystając ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite, możemy wówczas napisać

$$\mathbb{P}(\tau = n) = \sum_{\ell} \mathbb{P}(\tau = n | \text{układ przeszedł z } k \text{ do } \ell) \cdot p_{k\ell},$$

gdzie sumowanie rozciągnięte jest na wszystkie ℓ takie, że $p_{k\ell} > 0$ (tak, by napisane wyżej prawdopodobieństwa warunkowe miały sens). Korzystając z własności Markowa, widzimy, że

$$\mathbb{P}(\tau = n | \text{układ przeszedł z } k \text{ do } \ell) = \mathbb{P}(\tau = n-1 | \text{układ startuje z } \ell),$$

skąd wnioskujemy, że

$$\begin{aligned} t_k &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\ell} (n - 1 + 1)\mathbb{P}(\tau = n-1 | \text{układ startuje z } \ell) \cdot p_{k\ell} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\ell} (n-1)\mathbb{P}(\tau = n-1 | \text{układ startuje z } \ell) \cdot p_{k\ell} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\ell} \mathbb{P}(\tau = n-1 | \text{układ startuje z } \ell) \cdot p_{k\ell}. \end{aligned}$$

Widzimy, że pierwsza podwójna suma w ostatnim wyrażeniu wynosi

$$\sum_{\ell}\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\mathbb{P}(\tau = n-1|\text{układ startuje z }\ell)\cdot p_{k\ell} = \sum_{\ell} p_{k\ell}t_{\ell}.$$

Podobnie, zamieniając kolejność sumowania w drugiej podwójnej sumie, otrzymujemy, iż jest ona równa

$$\sum_{\ell}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(\tau = n-1|\text{układ startuje z }\ell)\cdot p_{k\ell} = \mathbb{P}(\tau<\infty)\sum_{\ell} p_{k\ell} = 1.$$

Wobec tego wykazaliśmy, że liczby t_k spełniają układ równań

$$t_k = \sum_{\ell} p_{k\ell}t_{\ell} + 1, \qquad k\in V.$$

Wzór ten pozostaje w mocy także gdy niektóre t_k są nieskończone.

Przykład 6.5. Obliczyć wartość oczekiwaną czasu trwania gry z Przykładu 6.1.

Rozwiązanie. Stosujemy oznaczenia wprowadzone w Przykładzie 6.1. Dla $k \in V$, niech t_k oznacza średni czas oczekiwania przy założeniu, że w chwili początkowej gracz A ma k złotych. Mamy $t_0 = t_5 = 0$ oraz na mocy powyższych rozważań,

$$t_1 = pt_0 + (1-p)t_2 + 1,\ t_2 = pt_1 + (1-p)t_3 + 1$$
$$t_3 = pt_2 + (1-p)t_4 + 1,\ t_4 = pt_3 + (1-p)t_5 + 1.$$

Rozwiązując powyższy układ równań, dostajemy odpowiedź:

$$t_2 = \frac{p^3+p^2-3p+3}{(1-p+p^2)^2 - p(1-p)}. \quad \square$$

Przykład 6.6. Po pustej szachownicy 3×3 porusza się wieża, w każdym ruchu przesuwając się na pole stojące w tym samym wierszu lub kolumnie (wybór każdego z czterech dostępnych pól jest jednakowo prawdopodobny). W chwili początkowej wieża znajduje się w lewym dolnym rogu. Obliczyć średni czas oczekiwania na dojście do centralnego pola.

Rozwiązanie. Jednym z kluczowych elementów rozwiązania jest odpowiedni dobór przestrzeni stanów V. Chwila zastanowienia prowadzi do wniosku, iż ze względu na symetrię, na szachownicy są trzy typy pól: narożne (N), centralne (C) oraz stojące w środku pierwszego/ostatniego wiersza (bądź pierwszej/ostatniej kolumny): będziemy je oznaczać literą R. Prowadzi to do przestrzeni $V = \{N, R, C\}$. Jeśli

N	R	N
R	C	R
N	R	N

Rysunek 9. Typy pól: N, R, C

chodzi o funkcję przejścia, to z narożnego pola wieża może osiągnąć dwa pola typu R i dwa pola narożne; jeśli wieża znajduje się na polu R, to w jej zasięgu znajduje się pole centralne, jedno pole typu R oraz dwa pola narożne; wreszcie, jeśli wieża jest na polu centralnym, to w następnym kroku znajdzie się na polu typu R. Wynika stąd, że odpowiednia macierz przejścia jest zadana przez

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Jeśli przez t_k $(k \in V)$ oznaczymy odpowiedni średni czas dojścia, to mamy

$$\begin{cases} t_C &= 0 \\ t_N &= \frac{1}{2}t_N + \frac{1}{2}t_R + 1, \\ t_R &= \frac{1}{2}t_N + \frac{1}{4}t_R + \frac{1}{4}t_C + 1, \end{cases}$$

skąd łatwo obliczamy, iż $t_N = 10$. □

Przykład 6.7. Po wierzchołkach kwadratu $ABCD$ porusza się pionek. W chwili początkowej pionek znajduje się w punkcie A, a w każdym kolejnym ruchu przesuwa się w sposób niezależny od poprzednich ruchów z prawdopodobieństwem $1/2$ do jednego z sąsiednich wierzchołków. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że pionek dojdzie do punktu D przed powrotem do punktu A.

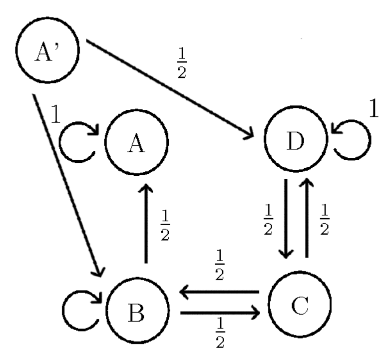
Rozwiązanie. Pierwszy pomysł polega na wzięciu $V = \{A, B, C, D\}$ i określeniu funkcji przejścia za pomocą macierzy

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Kłopot pojawia się jednak, gdy próbujemy wprowadzić odpowiednie liczby p_k: aby móc zastosować odpowiednie rozumowanie, jesteśmy zmuszeni przyjąć

(6.2) $\qquad p_k = \mathbb{P}(\text{układ dojdzie do } D \text{ przed dojściem do } A | \text{układ startuje z } k).$

Wtedy jednak p_A nie jest prawdopodobieństwem, które szukamy: powyższa definicja oczywiście daje $p_A = 0$. Problem tkwi w tym, że w powyższym zagadnieniu interesuje nas *powrót* do A, a nie *dojście do* A; z drugiej strony, metoda którą rozwinęliśmy wcześniej dobrze działa dla zagadnień tego drugiego typu.



Rysunek 10. Zmodyfikowana funkcja przejścia w Przykładzie 6.7

Aby pokonać tę trudność, wprowadzamy dodatkowy sztuczny stan A', który pełni rolę „startowego dublera” dla punktu A; bierzemy więc $V = \{A', A, B, C, D\}$.

Określmy funkcję przejścia za pomocą grafu z Rysunku 10. Widzimy wówczas, iż badane zagadnienie jest równoważne następującemu: przy założeniu, że pionek startuje z A', obliczyć prawdopodobieństwo, że dojdzie odwiedzi on punkt D przed dojściem do punktu A. Dla $k \in V$, niech p_k będzie zadane wzorem (6.2). Wówczas mamy $p_A = 0$, $p_D = 1$ oraz

$$\begin{cases} p_{A'} & = \frac{1}{2}p_B + \frac{1}{2}p_D, \\ p_B & = \frac{1}{2}p_A + \frac{1}{2}p_C, \\ p_C & = \frac{1}{2}p_B + \frac{1}{2}P_D. \end{cases}$$

Rozwiązując ten układ, otrzymujemy $p_{A'} = \frac{2}{3}$ i jest to odpowiedź której szukamy. $\square$

Zadania

1. Dwóch graczy X i Y rzuca na przemian kostką (zaczyna gracz X). Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że pierwszą dwójkę wyrzuci gracz X, a drugą dwójkę wyrzuci gracz Y.

2. Rzucamy prawidłową monetą aż do wyrzucenia serii czterech orłów pod rząd. Obliczyć wartość oczekiwaną liczby rzutów.

3. Rzucamy prawidłową kostką aż do momentu wyrzucenia trójki oraz parzystej liczby oczek. Obliczyć wartość oczekiwaną liczby rzutów.

4. Po wierzchołkach pięciokąta $ABCDE$ porusza się pionek. W chwili początkowej znajduje się w punkcie A, a w każdym kolejnym ruchu przesuwa się w sposób niezależny od poprzednich ruchów z prawdopodobieństwem $1/2$ do jednego z sąsiednich wierzchołków. Obliczyć

a) prawdopodobieństwo, że pionek powróci do punktu A przed dotarciem do punktu C,

b) wartość oczekiwaną liczby ruchów, jakie wykona pionek przed powrotem do punktu A.

5. W pojemniku I znajduje się jedna cząstka, w pojemniku II - trzy cząstki. Co jednostkę czasu losowo wybrana cząstka przemieszcza się z jednego pojemnika do drugiego. Ile czasu średnio musimy czekać na opróżnienie pojemnika I?

6. Po wierzchołkach sześcianu $ABCDA'B'C'D'$ porusza pionek. W chwili początkowej pionek znajduje się w punkcie A, a w każdym kolejnym ruchu przesuwa się w sposób niezależny od poprzednich ruchów z prawdopodobieństwem $1/3$ do jednego z sąsiadujących wierzchołków sześcianu. Obliczyć średni czas oczekiwania na dotarcie pionka do punktu D'.

7. Dane są dwa pudełka I oraz II. W pudełku I są trzy ponumerowane kule, drugie z pudełek jest puste. Dana jest także urna z ponumerowanymi trzema kulami. Co jednostkę czasu, losowana jest ze zwracaniem kula z urny, a następnie przekładana z pudełka do pudełka kula o tym numerze, jaki ma wylosowana kula z urny. Losowanie/przekładanie powtarzane jest tak długo, aż pudełko I będzie puste. Obliczyć średni czas trwania procedury.

8. Dwie osoby A i B grają w następującą grę, składającą się z ciągu losowań symetryczną monetą. W przypadku gdy wypadnie orzeł, gracz A zyskuje 1 punkt; w przeciwnym razie, gracz B zyskuje 1 punkt. Gra kończy się w momencie gdy jeden z graczy zgromadzi 3 punkty.

a) Obliczyć średni czas trwania gry (tj. średnią liczby rzutów monetą).

b) Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że w momencie zakończenia gry, przegrany gracz będzie miał dwa punkty.

c) Załóżmy, że gra kończy się w momencie gdy jeden z graczy zgromadzi co najmniej 3 punkty i ma co najmniej dwa punkty przewagi nad drugim graczem. Obliczyć średni czas trwania gry.

9. Dla ustalonej liczby całkowitej dodatniej n, rozważamy następujące błądzenie po zbiorze $\{1, 2, \dots, n\}$. W chwili początkowej znajdujemy się w stanie 1; następnie, jeśli w danej chwili jesteśmy w stanie $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, to w następnym ruchu przeskakujemy do jednej z liczb $\{k+1, k+2, \dots, n\}$ (każda z tych liczb jest równoprawdopodobna). Stan n jest pochłaniający. Obliczyć średni czas trwania błądzenia.

Kilka zadań dodatkowych

1. Zmienna losowa N przyjmuje wartości w zbiorze liczb całkowitych nieujemnych. Wykazać, że

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\mathbb{P}(N > n) = \frac{1}{2}(\mathbb{E}N^2 - \mathbb{E}N).$$

2. Rzucamy monetą, dla której prawdopodobieństwo otrzymania orła wynosi p, aż do momentu wyrzucenia łącznie 10 orłów. Niech X oznacza liczbę uzyskanych reszek. Wyznaczyć rozkład i wartość oczekiwaną zmiennej X.

3. W n urnach, ponumerowanych liczbami od 1 do n, umieszczamy losowo n kul o numerach 1, 2, ..., n tak, że kula o numerze k trafia do jednej z urn o numerach 1, 2, ..., k (wybór każdej urny jest tak samo prawdopodobny i nie zależy od wyborów dla innych kul).

a) Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że żadna urna nie będzie pusta.

b) Obliczyć wartość oczekiwaną liczby pustych urn.

4. W urnie znajduje się m kul czarnych. Wykonujemy następujący ciąg losowań: wyciągamy z urny czarną kulę i zastępujemy ją nową kulą, która jest czarna z prawdopodobieństwem p i biała z prawdopodobieństwem $1 - p$.

a) Obliczyć średnią liczbę losowań, po których w urnie będą wyłącznie białe kule.

b) Rozwiązać analogiczne zagadnienie, jeśli w każdym kroku *losujemy* kulę z urny i postępujemy jak wyżej jeśli jest czarna, a wrzucamy ją z powrotem jeśli jest biała.

5. W urnie znajduje się b białych kul i c czarnych kul. Przeprowadzamy następujący ciąg losowań: w każdym losowaniu dorzucamy do urny r czarnych kul, a następnie usuwamy r losowo wybranych kul. Obliczyć wartość oczekiwaną liczby białych kul po n losowaniach.

6. W urnie I znajdują się dwie białe i trzy czarne kule; w urnie II znajdują się trzy białe i pięć czarnych kul. Wyciągamy dwie kule z urny I i nie oglądając przekładamy do urny II. Następnie z urny II wyciągamy trzy kule. Obliczyć wartość oczekiwaną liczby białych kul w wylosowanej trójce.

7. Losujemy w sposób niezależny liczby a_1, a_2, ..., a_{100} ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 300\}$. Obliczyć wartość oczekiwaną mocy zbioru $\{a_1, a_2, \ldots, a_{100}\}$.

Literatura

[1] *Archiwum Olimpiady Matematycznej*, dostępne na stronie archom.ptm.org.pl

[2] P. Billingsley, *Prawdopodobieństwo i miara*, PWN, Warszawa, 1987.

[3] A. A. Borowkow, *Rachunek prawdopodobieństwa*, PWN, Warszawa, 1975.

[4] N. Deo, *Teoria grafów i jej zastosowania w technice i informatyce*, PWN, Warszawa, 1980.

[5] W. Feller, *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, t.I, PWN, Warszawa 1966, t. II, PWN, Warszawa 1978.

[6] J. Jakubowski, R. Sztencel, *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, SCRIPT, Warszawa, 2004.

[7] W. Krysicki, J. Bartos, W. Dyczka, K. Królikowska, M. Wasilewski, *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna w zadaniach. Cz. 1*, PWN, Warszawa, 2013.

[8] W. Niemiro, *Rachunek Prawdopodobieństwa i Statystyka Matematyczna*, SNS, 1999.

[9] A. Płocki, *Graf stochastyczny jako środek matematyzacji i rozumowania*, Matematyka-Społeczeństwo-Nauczanie **5**, 27–37.

[10] S. Ross, *A First Course in Probability* (8 ed.), Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, NJ 07458.

[11] J. Stojanow, I. Miraczijski, C. Ignatow, M. Tanuszew, *Zbiór zadań z rachunku prawdopodobieństwa*, PWN, Warszawa, 1991.

[12] R. Zieliński, *Rachunek prawdopodobieństwa z elementami statystyki matematycznej*, PZWS, Warszawa, 1973.

[13] R. Zieliński, *Siedem wykładów wprowadzających do statystyki matematycznej*, Biblioteka Matematyczna t. 72, PWN, Warszawa, 1990.