Zadanie 5. Wykazać tosamość

$$\zeta(z) = \frac{(2\pi)^z}{2\Gamma(z)\cos(\pi z/2)}\zeta(1-z), \qquad z \notin \mathbb{Z}.$$

Rozwiązanie:

Krok 1. Załóżmy najpierw, że $\mathfrak{Re} z > 1$. Rozważmy całkę

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{w^{z-1}}{e^{-w}-1} \mathrm{d}w,$$

gdzie $\mathcal{C}$ to krzywa uzyskana jako suma następujących trzech obiektów $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$: półprostej od $-\infty$ do r; okręgu o środku w 0 i promieniu r, obieganego od kąta $-\pi$ do $+\pi$; półprostej od $-r$ do $-\infty$. Mamy

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{w^{z-1}}{e^{-w}-1} \mathrm{d}w = \int_{\mathcal{C}_1} \frac{w^{z-1}}{e^{-w}-1} \mathrm{d}w + \int_{\mathcal{C}_2} \frac{w^{z-1}}{e^{-w}-1} \mathrm{d}w + \int_{\mathcal{C}_3} \frac{w^{z-1}}{e^{-w}-1} \mathrm{d}w.$$

Niech Log oznacza logarytm główny (tzn. przypisujący argumenty z przedziału $(-\pi, \pi]$). Wówczas dla dowolnego w nieleżącego na półprostej niedodatniej możemy napisać równość

$$w^{z-1} = e^{(z-1)Log w}$$

i w szczególności, jeśli t jest dowolną liczbą ujemną, to

$$\lim_{w \downarrow t} w^{z-1} = e^{(z-1)(\ln(-t)+i\pi)} \qquad \text{oraz} \qquad \lim_{w \uparrow t} w^{z-1} = e^{(z-1)(\ln(-t)+i\pi)}.$$

Symbol „ln” oznacza tu zwykły rzeczywisty logarytm, a strzałki $\downarrow$, $\uparrow$ użyte w powyższych granicach oznaczają, iż zbiegamy do liczby t odpowiednio po punktach z górnej / dolnej półpłaszczyzny.

Przeanalizujmy teraz całki po $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ i $\mathcal{C}_3$.

Całka po $\mathcal{C}_1$: stosujemy parametryzację $w = t$; zgodnie z powyższymi obserwacjami, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}_1} \frac{w^{z-1}}{e^{-w}-1} \mathrm{d}w &= \int_{\mathcal{C}_1} \frac{w^{z-1}}{e^{-w}-1} \mathrm{d}w \\
&= \int_{-\infty}^{-r} \frac{e^{(z-1)(\ln(-t)-i\pi)}}{e^{-t}-1} \mathrm{d}t \\
&= \int_{r}^{\infty} \frac{e^{(z-1)(\ln t - i\pi)}}{e^{t}-1} \mathrm{d}t \\
&= e^{-(z-1)i\pi} \int_{r}^{\infty} \frac{t^{z-1}}{e^{t}-1} \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Całka po $\mathcal{C}_3$: analogicznie jak wyżej,

$$\int_{\mathcal{C}_3} \frac{w^{z-1}}{e^{-w}-1}\mathrm{d}w = \int_{-r}^{-\infty} \frac{e^{(z-1)(\ln(-t)+i\pi)}}{e^{-t}-1}\mathrm{d}t = -e^{(z-1)i\pi}\int_r^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t-1}\mathrm{d}t$$

(w powyższej całce, minus bierze się stąd, iż granice całkowania są ,,w drugą stronę", tzn. od $-r$ do $-\infty$, a nie od $-\infty$ do $-r$, jak w całce po $\mathcal{C}_1$).

Całka po $\mathcal{C}_2$: stosujemy parametryzację $w = re^{i\varphi}$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$, skąd

$$\int_{\mathcal{C}_2} \frac{w^{z-1}}{e^{-w}-1}\mathrm{d}w = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(re^{i\varphi})^{z-1}}{e^{-re^{i\varphi}}-1} \cdot ire^{i\varphi}\mathrm{d}\varphi.$$

Wyrażenie podcałkowe jest rzędu $r^{\mathfrak{Re} z-1}$ gdy $r \to 0$ (istotnie: $(re^{i\varphi})^{z-1}$ jest rzędu $r^{\mathfrak{Re} z-1}$ oraz $e^{-re^{i\varphi}}-1$ jest rzędu r). Wobec tego, gdy $r \to 0$, dostajemy

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \frac{w^{z-1}}{e^{-w}-1}\mathrm{d}w &\to \left[e^{-(z-1)i\pi} - e^{(z-1)i\pi}\right]\int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t-1}\mathrm{d}t \\ &= 2i\sin(-\pi(z-1))\int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t-1}\mathrm{d}t \\ &= 2i\sin(\pi z)\Gamma(z)\zeta(z),\end{aligned}$$

gdzie w ostatnim przejściu skorzystaliśmy z elementarnych własności sinusa oraz zadania 4 z serii 10.

Kolejna ważna obserwacja jest następująca: całki odpowiadające różnym r są równe: wystarczy porównać kontury całkowania i skorzystać z holomorficzności funkcji

$$f(w) = \frac{w^{z-1}}{e^{-w}-1}.$$

Wobec tego, w powyższym ciągu przekształceń mamy nie tylko zbieżność, ale wręcz równość:

$$(*) \qquad \int_{\mathcal{C}} \frac{w^{z-1}}{e^{-w}-1}\mathrm{d}w = 2i\sin(\pi z)\Gamma(z)\zeta(z).$$

Krok 2. Powyższa równość ma także sens dla $\mathfrak{Re} z < 0$. Rozważmy teraz nieco inny obszar całkowania: spójrzmy na pierścień $P(0, r, R)$ i wytnijmy z niego odcinek $[-R, -r]$ (dodatkowo załóżmy, że liczba R jest postaci $(2N+1)\pi$). Nazwijmy brzeg tego obszaru przez D i zorientujmy go ujemnie. Następnie, rozważmy całkę

$$\int_D \frac{w^{z-1}}{e^{-w}-1}\mathrm{d}w$$

i spróbujmy ją wyrazić przez residua. Funkcja podcałkowa f ma punkty osobliwości postaci $2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$; ponadto,

$$\mathrm{res}_{2k\pi i} f = \lim_{w \to 2k\pi i} \frac{w - 2k\pi i}{e^{-w} - 1} w^{z-1} = -(2k\pi i)^{z-1}.$$

Teraz, zbiegnijmy z $R \to \infty$. Ponieważ $\mathfrak{Re} z < 0$, to całka po kawałku odpowiadającym okręgowi $C(0, R)$ dąży do 0. Dostajemy więc

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \frac{w^{z-1}}{e^{-w}-1} \mathrm{d}w &= \lim_{R \to \infty} \int_D \frac{w^{z-1}}{e^{-w}-1} \mathrm{d}w \\ &= -2\pi i \sum_{k=1}^{\infty} \Big[(2k\pi i)^{z-1} + (-2k\pi i)^{z-1} \Big] \\ &= -2\pi i (2\pi)^{z-1} \sum_{k=1}^{\infty} k^{z-1} \Big(e^{\pi i (z-1)/2} + e^{-\pi i (z-1)/2} \Big) \\ &= -2i(2\pi)^z \cos\left(\pi(z-1)/2\right) \zeta(1-z) \\ &= 2i(2\pi)^z \sin(\pi z/2) \zeta(1-z).\end{aligned}$$

Porównując to z (*) (oraz korzystając ze wzoru $\sin(\pi z) = 2\sin(\pi z/2)\cos(\pi z/2)$), dostajemy tezę.