Funkcje Analityczne - zadania przygotowacze. Wersja z dnia 09.06.2013r.

W poniższych zadaniach, D, ∂D oznaczają dysk jednostkowy oraz jego brzeg (tzn. okrąg jednostkowy), odpowiednio. Ponadto, $P(0,r,R)$ oznacza pierścień $\{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$. Wreszcie, Log oznacza logarytm główny, tzn. odpowiadający argumentom z przedziału $(-\pi, \pi]$.

1. Wyznaczyć funkcję harmonicznie sprzężoną do $u(x,y) = xy(x^2 - y^2)$.

2. Funkcja $f = u + iv : D \to D$ jest analityczna i spełnia warunek $f(0) = 0$. Wykazać, że funkcja
$$\frac{1+u}{(1+u)^2 + v^2}$$
jest harmoniczna na D oraz wyznaczyć funkcję do niej sprzężoną.

3. Funkcja u jest harmoniczna na $\mathbb{R}^2$, v jest harmonicznie sprzężona do u. Dowieść, że jeśli
$$xu(x,y) \geq yv(x,y)$$
dla wszystkich x, $y \in \mathbb{R}$, to $u = v \equiv 0$.

4. Załóżmy, że $D_- = \{z \in D : \mathfrak{Im}\, z \leq 0\}$, $D_+ = \{z \in D : \mathfrak{Im}\, z \geq 0\}$ oznaczają odpowiednio dolne oraz górne półkole jednostkowe. Funkcja $f : D \to \mathbb{C}$ jest ciągła, ponadto jest analityczna we wnętrzu D_- oraz we wnętrzu D_+. Wykazać, że f jest analityczna na D.

5. Czy istnieje funkcja $f : D \to \mathbb{C}$, spełniająca warunek $f(1/n) = f'(n/(n+1)) = \frac{2}{n+1}$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$?

6. Przekształcić zbiór $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1 - i| < 1\} \setminus \overline{D}$ konforemnie na D.

7. Przekształcić obszar $\left\{(x,y) : x > \sqrt{y^2+1}\right\}$ konforemnie na pierwszą ćwiartkę.

8. Wykazać, że istnieje funkcja holomorficzna f, zadana w pewnym otoczeniu 0, spełniająca równość $f^2(z) = z \sin z$.

9. Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości jakie może przyjąć całka $\displaystyle\int_\gamma \frac{z^3 \mathrm{d}z}{z^2+1}$, gdzie $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ jest krzywą łączącą -1 oraz 1, nie przechodzącą przez $\pm i$.

10. Obliczyć całkę $\displaystyle\int_E \frac{\mathrm{d}z}{z \sin z}$, gdzie E jest elipsą $x^2 + 16y^2 = 16$.

11. Obliczyć całkę $\displaystyle\int_{\mathcal{O}} \frac{\mathrm{d}z}{(z-1)(z-i)^{10}}$, gdzie $\mathcal{O}$ jest dodatnio zorientowanym okręgiem o środku w 1 i promieniu 5.

12. Obliczyć całkę $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^4} \mathrm{d}x$.

13. Obliczyć całkę $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{x}(x+1)}$.

14. Obliczyć całkę $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\varphi \mathrm{d}\varphi}{2+\cos\varphi}$.

15. Wykazać, że funkcja $f(z) = z^3 \sin\frac{1}{z}$ ma w punkcie $z = 0$ osobliwość istotną.

16. Określić rodzaj osobliwości w skończonych punktach osobliwych funkcji

a) $\dfrac{\sin z}{z(1+z^2)}$, b) $\dfrac{2\cos z - 2 + z\sin z}{z^6}$, c) $\dfrac{(z-1)^2(\cos z - 1)}{\sin^5 z}$, d) $\dfrac{1}{z}\exp\left(\dfrac{1}{1-z}\right)$.

17. Rozwinąć funkcję $f(z) = \mathrm{Log}\left(1+\frac{1}{z}\right)$ w szereg Laurenta w maksymalnym pierścieniu postaci $P(0, R, \infty)$. Ile wynosi R?

18. Funkcja $f : D \to \left\{z \in \mathbb{C} : \mathfrak{Re}\, z > \frac{1}{2}\right\}$ jest holomorficzna i spełnia warunek $f(1) = 1$. Wykazać, że $|f(z) - 1| \le |zf(z)|$ dla $z \in D$.

19. Funkcja $f : D \to \mathbb{C}$ przedłuża się funkcji ciągłej na $\overline{D}$. Udowodnić, że dla $0 \le r < 1$ i $\phi \in \mathbb{R}$ zachodzi wzór

$$f(re^{i\phi}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\phi - t) + r^2} \cdot f(e^{it})\, \mathrm{d}t.$$

20. Funkcja $f : D \to \mathbb{C}$ jest analityczna i rozszerza się do funkcji ciągłej na $\overline{D}$. Ponadto, zachodzą nierówności

$$\mathfrak{Re}\, f > 0, \quad \mathfrak{Im}\, f > 0 \qquad \text{dla } z \in \partial D.$$

Dowieść, że funkcja f przyjmuje wartości w pierwszej ćwiartce.

21. Wyznaczyć wszystkie homografie przekształcające pierścień $P(0, 1, 2)$ na siebie.

22. Ile rozwiązań w półpłaszczyźnie $\{z \in \mathbb{C} : \mathfrak{Re}\, z > 0\}$ ma równanie

$$z^8 + z^5 + z^3 + 1 = 0\ ?$$

23. Wykazać, że wielomian $P(z) = z^{20} + 20z + 5$ jest różnowartościowy w D.

24. Wyznaczyć liczbę pierwiastków wielomianu $z^8 - 4z^5 + z^2 - 1$ w kole jednostkowym.

25. Udowodnić tożsamość $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n+i)^2} = \frac{4\pi^2}{e^{-2\pi} - e^{2\pi} - 2}$.

26. Wyznaczyć „zwarty” wzór na iloczyn $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{8z^2}{9n^2} - \frac{z^4}{9n^4}\right)$, $z \in \mathbb{C}$.

27. Udowodnić, że $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi z)}$, dla $z \notin \mathbb{Z}$.

Odpowiedzi, wskazówki do rozwiązań.

1. Odpowiedź: $v(x,y) = \frac{1}{4}(-x^4 + 6x^2y^2 - y^4) + c$, $c \in \mathbb{R}$.
2. Rozważyć funkcję $1/(1+f)$.
3. Funkcja $f = u + iv$ jest analityczna. Rozważyć funkcję $zf(z)$ i skorzystać z zasady maksimum (jednostronnej wersji!) dla jej części rzeczywistej, por. zad. 4 (ii) z serii 4.
4. Całka po dowolnej krzywej zamkniętej jest równa 0.
5. Skorzystać z zasady identyczności. Odpowiedź: nie istnieje.
6. Użyć homografii by przekształcić dany obszar na ćwiartkę płaszczyzny. Dalej można np. użyć funkcji z^2 oraz logarytmu.
7. Zacząć od funkcji $z \mapsto z^2$.
8. Mamy $z \sin z = z^2 \cdot \frac{\sin z}{z}$; funkcja $\sin z/z$ jest oddzielona od 0 w pewnym otoczeniu 0.
9. Skorzystać z twierdzenia Cauchy'ego/twierdzenia o residuach.
10. Skorzystać z twierdzenia Cauchy'ego/twierdzenia o residuach.
11. Skorzystać z twierdzenia Cauchy'ego dla pochodnej.
12. Skorzystać z twierdzenia Cauchy'ego/twierdzenia o residuach.
13. Skorzystać z twierdzenia o residuach. Całkować po brzegu pierścienia $P(0,r,R)$ (r małe, R duże), rozciętego wzdłuż odcinka $[r,R]$.
14. Sprowadzić do całki po okręgu jednostkowym.
15. Jeśli przejść z z do 0 po liczbach rzeczywistych, granica funkcji f wynosi 0; jeśli zaś zbiec po liczbach czysto urojonych, granica wynosi nieskończoność. Stąd teza: nieistnienie granicy daje istotną osobliwość punktu $z = 0$.
16. a) bieguny proste w $\pm i$, w zerze osobliwość pozorna; b) biegun rzędu 2 w zerze; c) w punktach postaci $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, są bieguny rzędu 3; w punktach postaci $2k\pi + \pi$, $k \in \mathbb{Z}$, są bieguny rzędu 5; d) biegun prosty w zerze, osobliwość istotna w $z = 1$ (por. poprzednie zadanie).
17. Zróżniczkować, $R = 1$.
18. Skorzystać z lematu Schwarza dla funkcji $1/f - 1$.
19. Niech $p = re^{i\phi}$. Na przykład, można skorzystać ze wzoru Cauchy'ego dla okręgu jednostkowego i funkcji $z \mapsto f\left(\frac{z+p}{1+\bar{p}z}\right)$ (złożenie jest funkcją holomorficzną w D, przekształcającą 0 na $f(p)$; trzeba tylko sprawdzić, że po przejściu do współrzędnych biegunowych, odpowiednia całka pokrywa się z tą z treści). Istnieją też inne rozwiązania.
20. Tu także jest wiele różnych rozwiązań. Można np. skorzystać z poprzedniego zadania, albo zasady maksimum dla funkcji analitycznych (dla e^f i e^{if}).
21. Są dwie rodziny: $\{e^{ia}z\}_{a\in\mathbb{R}}$ oraz $\{2e^{ia}/z\}_{a\in\mathbb{R}}$.
22. Skorzystać z zasady argumentu. Odpowiedź: cztery.
23. Można bezpośrednio. Można także wykorzystać zadanie 5 z serii 3.
24. Skorzystać z twierdzenia Rouche. Odpowiedź: pięć.
25. Całkować funkcję $\mathrm{ctg}(\pi z)/((z+i)^2)$ wzdłuż kwadratu o wierzchołkach $(N+\frac{1}{2})(1+i)$, $(N+\frac{1}{2})(-1+i)$, $-(N+\frac{1}{2})(1+i)$, $(N+\frac{1}{2})(1-i)$. Por. zadanie 2 z serii 7.
26. Rozłożyć na czynniki kwadratowe i skorzystać z rozwinięcia sinusa w iloczyn. Można też próbować porównać pochodne logarytmiczne.
27. Wykorzystać rozwinięcie funkcji sin oraz Γ w iloczyn.