Funkcje analityczne - zadania na czwartą kartkówkę

1. Wyznaczyć „zwarty” wzór na iloczyn

$$a)\quad \prod_{n=0}^{\infty}(1+z^{2^n}),\quad |z|<1. \qquad\qquad b)\quad \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z^4}{16n^4}\right),\quad z\in\mathbb{C}.$$

2. Wykazać tożsamość

$$\frac{\sin(\pi z)}{\pi z(1-z)}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z(1-z)}{n(n+1)}\right),\qquad z\in\mathbb{C}\setminus\{0,1\}.$$

3. Całkując odpowiednią funkcję holomorficzną po brzegu pierścienia $P(0,r,R)$ rozciętego wzdłuż dodatniej półosi, obliczyć całkę

$$\int_0^\infty \frac{x^{1/3}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

4. Całkując funkcję $f(z)=z^{s-1}e^{-z}$ wzdłuż brzegu części pierścienia $P(0,r,R)$ leżącej w pierwszej ćwiartce wykazać, że jeśli $\mathfrak{Re}s\in(0,1)$, to

$$\int_0^\infty x^{s-1}e^{-ix}\,\mathrm{d}x=\Gamma(s)\exp\left(-\pi is/2\right).$$

5. Wyznaczyć
a) obraz prostej $\mathfrak{Re}z=2$ przy homografii $h(z)=(z+1)/(z+2)$.
b) obraz okręgu $|z-5|=5$ przy homografii $h(z)=(3z+2)/z$.

6. Wyznaczyć ogólną postać homografii przekształcających okrąg $|z|=1$ na prostą rzeczywistą.

7. Homografia przekształca pierścień $P(0,r_1,R_1)$ na pierścień $P(0,r_2,R_2)$. Wykazać, że $R_1/r_1=R_2/r_2$.

8. Wyznaczyć obraz koła jednostkowego przy przekształceniu $f(z)=z+1/z$.

9. Podać przykład przekształcenia konforemnego, w którym obrazem półkola $\{z\in\mathbb{C}:|z|<1,\ \mathfrak{Re}z>0\}$ jest zbiór $\{z\in\mathbb{C}:\mathfrak{Im}z>0\}\setminus\{(ai:a\in[1,\infty)\}$ (górna półpłaszczyzna z wyciętą półprostą). Czy takim przekształceniem może być homografia?

10. Podać przykład przekształcenia konforemnego, przy którym obrazem kąta $\{z\in\mathbb{C}:Arg z\in(0,\pi/6)\}$ jest zbiór $\{z\in\mathbb{C}:|z-5|<1\}$.

11. Niech U będzie obszarem zawierającym domknięcie $\overline{D}$ dysku jednostkowego D, a funkcje f, g będą funkcjami holomorficznymi na U spełniającymi warunek $|f(z)|=|g(z)|$ dla wszystkich $z\in\partial D$. Udowodnić, że jeśli $f(z)g(z)\neq 0$ dla wszystkich $z\in\overline{D}$, to $f=c\cdot g$ dla pewnej stałej c o module 1.

Wskazówka: Rozważyć funkcję $h(z)=f(z)/g(z)$ dla z z pewnego otoczenia D. Być może warto skorzystać z zadania 3 z serii 4.

12. Załóżmy, że $D=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ jest dyskiem jednostkowym. Funkcja $f:D\to\mathbb{C}$ jest holomorficzna i spełnia warunek $f(D)\subseteq D$. Dowieść, że jeśli $p\in D$ i $f(p)=0$, to $f=b_p\cdot g$, gdzie $b_p(z)=(z-p)/(1-\bar{p}z)$, zaś g jest funkcją holomorficzną na D, spełniającą warunek $g(D)\subseteq D$ lub $g=\text{const}$.
Wskazówka: skorzystać z lematu Schwarza.

13. Załóżmy, że $D=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ jest dyskiem jednostkowym. Funkcja $f:D\to D$ jest holomorficzna oraz punkt 0 jest jej zerem rzędu n (tzn. $f(z)=\sum_{k\geq n}a_kz^k$ na D). Wykazać, że

$$f^{(n)}(0)\leq n!\quad \text{ oraz } |f(z)|\leq|z|^n \text{ dla wszystkich } z\in D.$$

Ponadto, wykazać, że jeśli $f^{(n)}(0)=n!$ lub $f(z_0)=|z_0|^n$ dla pewnego $z_0\neq 0$, to istnieje $a\in\mathbb{C}$, $|a|=1$ takie, że $f(z)=az^n$.