Funkcje Analityczne - zadania na trzecią kartkówkę

1. Obliczyć całkę $\displaystyle\int_{\mathcal{O}} \frac{e^z}{(z+3)^3\sin^2(z+1)}\mathrm{d}z$, gdzie $\mathcal{O}$ oznacza dodatnio zorientowany okrąg o środku w 0 i promieniu 2.

2. Obliczyć całkę $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)}$.

3. Obliczyć sumę $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$.

Wskazówka: całkować funkcję $f(z) = \left[(z^2+1)\sin(\pi z)\right]^{-1}$ po brzegu kwadratu o wierzchołkach $(N+\frac{1}{2})(1+i)$, $(N+\frac{1}{2})(-1+i)$, $-(N+\frac{1}{2})(1+i)$, $(N+\frac{1}{2})(1-i)$.

4. Wykazać tożsamość $\displaystyle\pi\operatorname{ctg}(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-n^2}$, dla $z \neq 0, \pm1, \pm2, \ldots$.

Wskazówka: naśladować rozwiązanie zadania 6 z serii 6.

5. Znaleźć wszystkie funkcje meromorficzne f spełniające następujące warunki:
a) jedynymi osobliwościami f są bieguny proste w punktach -1, -2, …, -10.
b) f jest ograniczona na zbiorze $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 100\}$.
c) $\int_{\mathcal{O}_n} f(z)\mathrm{d}z = n$ dla $n = 1, 2, \ldots, 10$, gdzie $\mathcal{O}_n$ oznacza dodatnio zorientowany okrąg o środku w 0 i promieniu $n+1/2$.

6. Dana jest funkcja $f(z) = \frac{1+z}{z^2}\operatorname{ctg} z$.
a) Podać część główną rozwinięcia Laurenta funkcji f wokół zera.
b) Wyznaczyć wszystkie punkty osobliwe funkcji f w kole $|z| < 7$. Dla każdego takiego punktu, określić rodzaj osobliwości (pozorna, istotna, biegun, i jakiego rzędu).

7. Rozwinąć w szereg Laurenta wokół 0 funkcję $f(z) = 1/(z^2-3z+2)$ (podać trzy rozwinięcia odpowiadające trzem maksymalnym pierścieniom holomorficzności f).

8. Wyznaczyć liczbę pierwiastków wielomianu $W(z) = z^7 - 5z^3 + 12$
a) w kole $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$,
b) w pierścieniu $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$.

9. Niech $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dowieść, że dla dostatecznie dużych n równanie $\operatorname{tg} z = cz$ ma dokładnie $2n+1$ rozwiązań w pasie $-n\pi \leq \mathfrak{Re} z \leq n\pi$.

Wskazówka: równanie można zapisać równoważnie w postaci $\sin z = cz\cos z$. Skorzystać z twierdzenia Rouche.

10. Funkcja analityczna f zadana na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ma w zerze biegun. Dowieść, że dla dowolnego wielomianu W, złożenie $W \circ f$ ma w zerze biegun lub osobliwość pozorną.

11. Załóżmy, że $a \in \mathbb{C}$ jest punktem osobliwym funkcji analitycznej f zadanej w pewnym pierścieniu $P(a,0,r)$. Dowieść, że jeśli f jest ograniczona w tym pierścieniu, to a jest punktem pozornie osobliwym.

12. Załóżmy, że $a \in \mathbb{C}$ jest punktem istotnie osobliwym funkcji analitycznej f zadanej w pewnym pierścieniu $P(a,0,r)$. Dowieść, że zbiór $f(P(a,0,r))$ (obraz pierścienia $P(a,0,r)$) jest gęsty w $\mathbb{C}$.

Wskazówka: nie wprost. Być może warto też skorzystać z poprzedniego zadania.