Funkcje Analityczne - zadania na drugą kartkówkę

1. Obliczyć całkę z funkcji $f(z) = \dfrac{z}{z^2+1}$ wzdłuż krzywej $\gamma = \{(t, 2\cos t) : -\pi/2 \leq t \leq 3\pi/2\}$.

2. Obliczyć całkę $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{2+\cos\varphi}$.

3. Obliczyć całkę $\displaystyle\int_{\mathcal{O}(0,2)} \frac{\sin z \mathrm{d}z}{z^3(z-5)}$, gdzie $\mathcal{O}(0,2)$ oznacza dodatnio zorientowany okrąg o środku w 0 i promieniu 2.

4. Obliczyć całkę $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos tx}{1+x^2}\mathrm{d}x$ dla ustalonej liczby rzeczywistej t.

5. Obliczyć całkę $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n}$, gdzie $n \geq 2$ jest ustaloną liczbą naturalną.
Wskazówka: Rozważyć całkę wzdłuż odpowiedniego wycinka koła o dużym promieniu i kącie $2\pi/n$.

6. Dany jest wielomian $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stopnia n. Wykazać, że

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\mathcal{O}(0,R)} \frac{P'(z)}{P(z)}\mathrm{d}z = 2\pi i n.$$

7. Załóżmy, że $z_0 \in \mathbb{C}$ oraz $R > 0$ są ustalonymi liczbami. Rozstrzygnąć, czy istnieje funkcja holomorficzna $f : \mathbb{C} \to \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| > R\}$, różna od stałej.

8. Rozstrzygnąć, czy istnieje funkcja holomorficzna $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ spełniająca warunek $f\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{n}{5n-1}$ dla $n = 1, 2, \ldots$.

9. Dana jest funkcja harmoniczna u na dysku jednostkowym, mająca maksimum lokalne w punkcie $(\frac{1}{2}, 0)$. Udowodnić, że u jest funkcją stałą.

Wskazówka: Skorzystać z zadania 3 z serii 4 (a raczej jego wersji, w której liczba 0 jest zastąpiona liczbą 1/2); następnie, użyć zadania 5 z serii 4 oraz zasady identyczności.

10. Dla ustalonej liczby $z \in \mathbb{C}$ takiej, że $\mathfrak{Re} z < 0$, obliczyć całkę $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{zx^2}\mathrm{d}x$.

Wskazówka: Najpierw obliczyć całkę dla rzeczywistych z; następnie rozszerzyć otrzymaną tożsamość korzystając z zasady identyczności. Alternatywne rozwiązanie sprowadza się do przecałkowania po odpowiednim konturze.

11. Dana jest funkcja holomorficzna f na obszarze zawierającym koło jednostkowe, spełniająca warunek $|f(z)| < 1$ dla wszystkich z o module 1. Udowodnić, że istnieje liczba z z koła jednostkowego taka, że $f(z) = z$.

Wskazówka: Skorzystać ze wzoru Cauchy'ego oraz twierdzenia Brouwera o punkcie stałym.