

Funkcje Analityczne - zadania na pierwszą kartkówkę

1. Obliczyć $(i + \sqrt{3})^{100}$.

2. Dane są liczby zespolone z, w o module mniejszym niż 1. Dowieść, że moduł liczby

$$\frac{z - w}{1 - \bar{w}z}$$

także jest mniejszy niż 1.

3. Wyznaczyć wszystkie miejsca zerowe funkcji $f(z) = \sin z$ oraz obraz prostej $\{z \in \mathbb{C} : \Re z = \frac{\pi}{4}\}$ przy tej funkcji.

4. Na bokach AB, BC, CD, DA czworokąta wypukłego $ABCD$ zbudowano, na zewnątrz tego czworokąta, trójkąty prostokątne równoramienne ABK, BCL, CDM i DAN takie, że

$$\angle ABK = \angle BCL = \angle CDM = \angle DAN = 90^\circ.$$

Dowieść, że jeśli czworokąt $KLMN$ jest równoległobokiem, to $ABCD$ też jest równoległobokiem.

Uwaga: Teza pozostaje w mocy jeśli założymy, że trójkąty ABK, BCL, CDM i DAN są podobne.

5. Wyznaczyć wszystkie punkty $z \in \mathbb{C}$, w których funkcja $f(z) = z \Re z$ jest różniczkowalna.

6. Dane są funkcje harmoniczne u, v na kole jednostkowym $D \subset \mathbb{C}$, przy czym v jest sprzężona do u i $u^2 + v^2 > 0$ na D . Dowieść, że funkcje

$$\frac{2u + v}{u^2 + v^2}, \quad \frac{u - 2v}{u^2 + v^2}$$

są harmoniczne na D oraz druga z funkcji jest harmonicznie sprzężona do pierwszej.

7. Wyznaczyć funkcję harmonicznie sprzężoną do funkcji

a) $u(x, y) = e^x(x \cos y - y \sin y), (x, y) \in \mathbb{R}^2,$

b) $u(x, y) = \frac{x^3 + xy^2 + x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$

8. Wyznaczyć wszystkie funkcje harmoniczne u zadane na kole jednostkowym w \mathbb{R}^2 o tej własności, że u^3 jest funkcją harmoniczną.

9. Załóżmy, że $D \subset \mathbb{C}$ jest ustalonym obszarem. Wyznaczyć wszystkie funkcje analityczne f spełniające warunek $|\Re f| = |\Im f|$ na D .

10. Obliczyć całkę $\int_\gamma (\bar{z} + 2z) dz$, gdzie γ jest dodatnio zorientowanym kwadratem o wierzchołkach $0, 1, 1 + i, i$.

11. Udowodnić, że wielomian $P(z) = z^{671} - 2013z + 10$ jest różnowartościowy w kole jednostkowym D . Wywnioskować, że P ma dokładnie jeden pierwiastek w D .