Zadania z Funkcji Analitycznych - 9

1. Dany jest ciąg $(A_n)_{n\geq 1}$ liczb nieujemnych oraz ciąg $(u_n)_{n\geq 1}$ funkcji analitycznych na pewnym obszarze $G \subset \mathbb{C}$, przy czym $\sum_{n=1}^{\infty} A_n < \infty$ oraz $|u_n(z)| \leq A_n$ dla wszystkich $z \in G$, $n = 1, 2, \ldots$.

(i) Dowieść, że iloczyn $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + u_n(z))$ jest zbieżny oraz zadaje funkcję analityczną f na G.

(ii) Dowieść, że jeśli $u_n(z) \neq -1$ dla wszystkich $z \in G$ oraz $n = 1, 2, \ldots$, to

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n'(z)}{1 + u_n(z)} = \frac{f'(z)}{f(z)}.$$

2. Dowieść, że

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \qquad \text{dla } z \in \mathbb{C}.$$

3. Obliczyć $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{n^2} + \frac{z^4}{n^4}\right)$.

4. Dowieść, że dla $z \in \mathbb{C}$ oraz a niebędącej liczbą całkowitą,

$$\frac{\sin \pi(z + a)}{\sin \pi a} = \left(1 + \frac{z}{a}\right) \prod_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(1 + \frac{z}{a + n}\right) e^{-z/n}.$$