Zadania z Funkcji Analitycznych - 7

1. Obliczyć całkę $\int_{\mathcal{O}} \frac{\mathrm{d}z}{(z-1)^2 z}$, gdzie $\mathcal{O}$ jest okręgiem o środku w 0 i promieniu 5.

2. Obliczyć sumę $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

Wskazówka: całkować funkcję $\mathrm{ctg}(\pi z)/(z^2+1)$ wzdłuż kwadratu o wierzchołkach $(N+\frac{1}{2})(1+i)$, $(N+\frac{1}{2})(-1+i)$, $-(N+\frac{1}{2})(1+i)$, $(N+\frac{1}{2})(1-i)$.

3. Korzystając z tożsamości $\frac{(\mathrm{ctg}(z^2))'}{\mathrm{ctg}(z^2)} = -\frac{2z}{\sin(z^2)\cos(z^2)}$, obliczyć

$$\int_{\mathcal{O}} \frac{z}{\sin(z^2)\cos(z^2)} \mathrm{d}z,$$

gdzie $\mathcal{O}$ oznacza okrąg o środku w 0 i promieniu 3.

4. Wyznaczyć liczbę pierwiastków wielomianu a) $W(z) = 5z^6 - 2z^5 - z^4 + 1$, b) $W(z) = 5z^6 - 2z^5 - z^4 - 2$ wewnątrz koła jednostkowego.

5. Udowodnić, że równanie $z^3 + e^{-z} = 5$ ma dokładnie jeden pierwiastek o dodatniej części rzeczywistej.

6. Wyznaczyć wszystkie funkcje f holomorficzne na $\mathbb{C} \setminus \{0, 2\}$ spełniające poniższe cztery warunki:
a) f ma biegun rzędu 2 w zerze i rzędu 1 w dwójce,
b) f jest ograniczona na zbiorze $|z| > 5$,
c) $f(1) = 3$, $f'(1) = 6$,
d) $\int_{|z|=1} f = 2\pi i$ oraz $\int_{|z|=4} f = 0$.