Zadania z Funkcji Analitycznych - 6

1. Rozwinąć funkcję $f(z) = 10/(z^2+1)(z^2-9)$ w szereg Laurenta na maksymalnych pierścieniach o środku w 0, które nie zawierają jej punktów osobliwych.

2. Niech

$$f(z) = \frac{e^z + \cos z - z - 2}{\sin(z^2)}.$$

Dowieść, że funkcję f można rozszerzyć do funkcji holomorficznej $\tilde{f}$ w pewnym otoczeniu 0. Wyznaczyć współczynniki c_0, c_1, c_2 rozwinięcia Maclaurina $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ funkcji $\tilde{f}$.

3. Rozwinąć funkcję a) $f(z) = (z^2+1)^{-1}$, b) $f(z) = \frac{e^z}{(z-i)^2}$ w szereg Laurenta w pierścieniu $P(i, 0, 1)$. Wyznaczyć $\operatorname{res}_i f$. Jaki rodzaj osobliwości ma funkcja f w punkcie i?

4. Wyznaczyć część główną rozwinięcia Laurenta funkcji $f(z) = e^z/\sin^2 z$ w punkcie 0 oraz wyznaczyć residuum $\operatorname{res}_0 f$. Jaki rodzaj osobliwości ma funkcja f w punkcie 0?

5. Rozwinąć w szereg Laurenta wokół 0 funkcję $f(z) = e^{z+1/z}$. Jaki rodzaj osobliwości ma funkcja f w punkcie 0?

6. Niech $f(z) = \dfrac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}$ oraz $g(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$.

a) Wykazać, że f i g są holomorficzne na $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ oraz mają te same części główne w otoczeniu każdego punktu osobliwego $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

b) Dowieść, że $f = g$.

7. Funkcja f jest holomorficzna w pierścieniu $P(0, 0, 1)$ oraz spełnia warunek $\lim_{z\to 0} \sqrt{|z|} f(z) = 0$. Dowieść, że f ma w zerze osobliwość pozorną.