## Zadania z Funkcji Analitycznych - 5

**1.** Obliczyć $\int_\gamma \frac{1}{(1+z^2)^n}\mathrm{d}z$, gdzie $\gamma$ jest dodatnio zorientowanym okręgiem o środku w $1+i$ i promieniu $\sqrt{2}$.

**2.** Funkcja holomorficzna $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ spełnia warunek wzrostu $\limsup_{z\to\infty} |f(z)/z^n| < \infty$ dla pewnego $n \geq 0$. Wykazać, że $f$ jest wielomianem.

**3.** Rozstrzygnąć, czy istnieje funkcja analityczna $f$ określona na dysku jednostkowym, spełniająca warunki

$$f(1/n) = f(-1/n) = 1/n^3, \quad n = 2, 3, \ldots.$$

**4.** Funkcje analityczne $f$, $g$, zadane na obszarze $D$ zawierającym 0, nie mają miejsc zerowych i spełniają warunek

$$\frac{f'(1/n)}{f(1/n)} = \frac{g'(1/n)}{g(1/n)} \qquad \text{dla dostatecznie dużych } n.$$

Wyznaczyć prostą zależność między $f$ i $g$.

**5.** Korzystając z zasady identyczności dowieść, że jeśli $\mathfrak{Re}\, z > 0$, to

$$\int_0^\infty e^{-zt}\mathrm{d}t = \frac{1}{z}.$$

**6.** Dowieść, że funkcja

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\mathrm{d}t$$

jest analityczna na półpłaszczyźnie $\{z \in \mathbb{C} : \mathfrak{Re}\, z > 0\}$ i spełnia tam warunek $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$.